

ЈЕДАН ЗАНИМЉИВ ЗАДАТАК СА МЕТОДИЧКЕ РАДИОНИЦЕ У ВАЉЕВУ

7. фебруар 2013.

Задатак. Дата је функција $f : \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}_0$, која је задата таблицом

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$f(n)$	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	...

- (а) Која функционална једначина карактерише дату функцију?
- (б) Решити добијену диференцну једначину.
- (в) Изразити дату функцију у експлицитном облику.
- (г) Шта дата функција суштински представља (у области планиметрије)?
- (д) Формулисати низ проблема који се односе на дату функцију и њено суштинско значење.

Аутор: проф. Др Војислав Андрић; Решење: Вељко Тировић.

Решење. (а) Из дате таблице уочавамо низ вредности функције:

$$f(3) = 0$$

$$f(4) = 2$$

$$f(5) = 5$$

$$f(6) = 9$$

$$f(7) = 14$$

$$f(8) = 20$$

$\vdots$

Анализирајући овај низ лако долазимо до закључка да се вредност дате растуће функције повећава по некој правилности. Разлика између $f(4)$ и $f(3)$ је 2, разлика између $f(5)$ и $f(4)$ је 3, разлика између $f(6)$

и $f(5)$ је 4, итд. На тај начин долазимо до одговарајуће функционалне једначине:

$$f(n+1) = f(n) + n - 1, \quad n \geq 3, \quad f(3) = 0$$

На основу добијене функционалне једначине, узимајући $f(n) = a_n$ долазимо до одговарајуће диференцне једначине:

$$a_{n+1} = a_n + n - 1, \quad n \geq 3, \quad a_3 = 0$$

За њено решавање, такође уочимо следећи низ једнакости које одговарају односима између узастопних итерација:

$$a_4 = a_3 + 2$$

$$a_5 = a_4 + 3$$

$$a_6 = a_5 + 4$$

$\vdots$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + n - 3$$

$$a_n = a_{n-1} + n - 2$$

а одавде следи да је:

$$a_4 - a_3 = 2$$

$$a_5 - a_4 = 3$$

$$a_6 - a_5 = 4$$

$\vdots$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = n - 3$$

$$a_n - a_{n-1} = n - 2$$

Ако их све саберемо добићемо:

$$a_n = a_3 + 2 + 3 + \dots + (n - 2)$$

$$a_n = 0 + \sum_{j=2}^{n-2} j$$

односно

$$a_n = \sum_{j=1}^n j - 1 - (n - 1) - n$$

Искористимо сада вредност познатог збира $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$, па ћемо имати:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=1}^n j - 2n = \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \\ &= \frac{n(n+1) - 4n}{2} = \frac{n(n-3)}{2} \end{aligned}$$

Што представља решење дела (б) датог задатка.

(в) На основу резултата добијеног у претходној тачки долазимо до експлицитног облика наше функције:

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

(г) Суштински, дата функција има своју "геометријску интерпретацију" и представља формулу за рачунање броја дијагонала конвексног n -тоугла.

(д) Мотивисани добијеним резултатима можемо поставити низ задатака који се односе на ову функцију. Неки од њих, који могу бити интересантни за разматрање су:

1. Ако се број страница n -тоугла удвостручи, број његових дијагонала се повећа седам пута. Одредити о ком n -тоуглу је реч.
2. Ако се број страница n -тоугла повећа за три, број његових дијагонала се удвостручи. Одредити n и утврдити да ли је решење јединствено?
3. Ако се број дијагонала n -тоугла повећа за 100 за колико се повећа број страница?
4. Да ли постоји многоугао коме се број дијагонала утростручи уколико се број темена повећа за три?