

Problemi rešetke i mreže - Pikova teorema

Vladimir Mišić, Valjevo

I Pravilni poligoni na celobrojnoj rešetki

Definicija 1: Skup tačaka R sa celobrojnim koordinatama u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu naziva se celobrojna rešetka, tj.

$$R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Definicija 2: Skup tačaka u ravni P čije koordinate predstavljaju celobrojne umnoške realnih vrednosti p i q ($p > 0, q > 0$) redom, naziva se pravougaona rešetka, tj.

$$P_{p,q} = \{(xp, yq) | x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Definicija 3: Za poligon se kaže da je razapet na celobrojnoj ili pravougaonoj rešetki ako sva njegova temena pripadaju toj rešetki.

Tvrđenje 1: Ako tri temena paralelograma pripadaju pravougaonoj rešetki, tada njoj pripada i četvrto teme paralelograma.

Dokaz: Neka je data pravougaona rešetka

$$P_{p,q} = \{(xp, yq) | x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

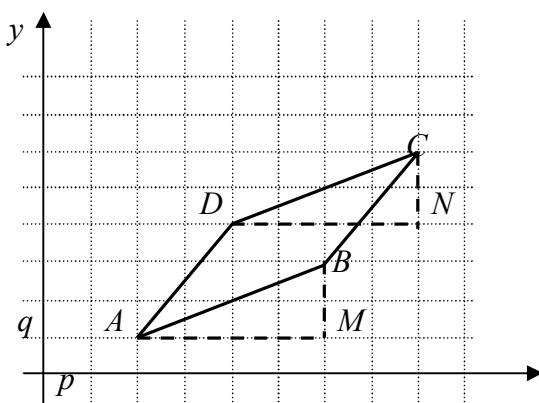
Tačke $A(px_1, qy_1), B(px_2, qy_2)$ i $C(px_3, qy_3)$ su neke tri različite tačke te rešetke. Četvrto teme paralelograma je tačka D . Neka je tačka M podnožje normale iz tačke B na pravu koja sadrži tačku A i paralelna je sa x -osom, a tačka N podnožje normale iz tačke C na pravu koja sadrži tačku D i paralelna je sa y -osom (slika 1).

Kako važi da je $|BM| = |CN|$ i $|AM| = |DN|$, mogu se izračunati koordinate tačke $D(k, l)$:

$$k = |px_3 - |DN|| = |px_3 - p|x_2 - x_1|| = p|x_3 - |x_2 - x_1|| = pk_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$l = |qy_3 - |CN|| = |qy_3 - q|y_2 - y_1|| = q|y_3 - |y_2 - y_1|| = ql_1, l_1 \in \mathbb{Z},$$

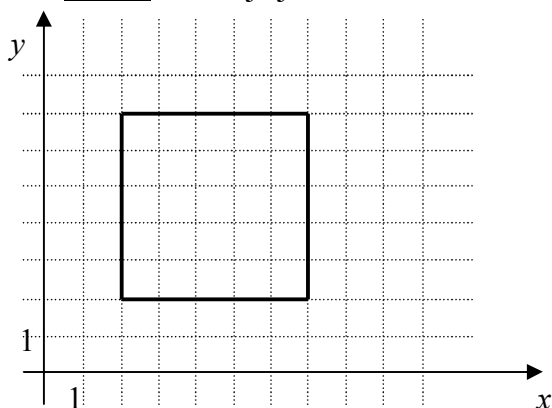
a to znači da D pripada pravougaonoj rešetki $P_{p,q}$. ♦



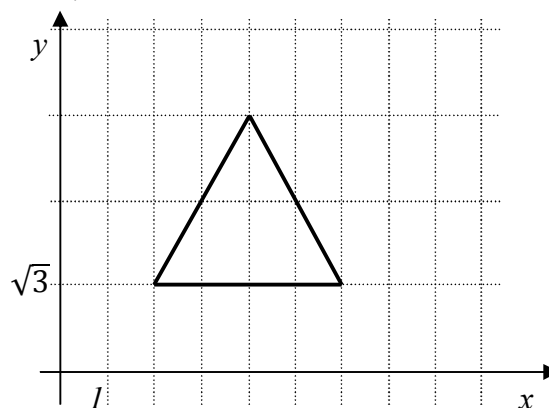
Slika 1

Tvrđenje 2: Jednakostranični trougao, kvadrat i pravilni šestougao se mogu razapeti na nekoj pravougaonoj rešetki.

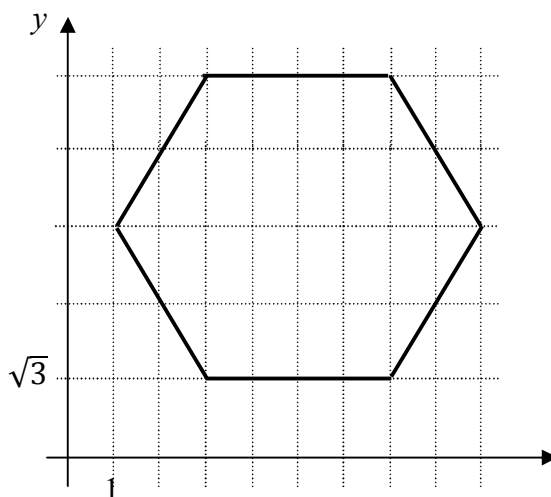
Dokaz: Rešenje je dato na sledećim slikama 2, 3 i 4.♦



Slika 2



Slika 3

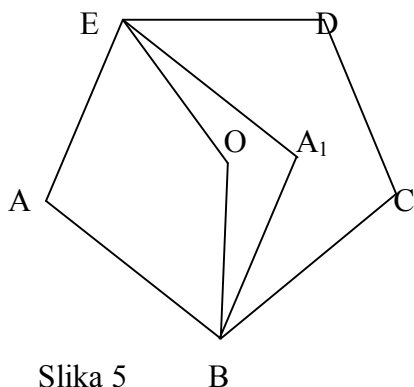


Slika 4

Tvrđenje 3: Jednakostranični trougao, kvadrat i pravilni šestougao su jedini pravilni poligoni koji se mogu razapeti na nekoj pravougaonoj rešetki.

Dokaz: Ako postoji neki petougao koji se može razapeti na nekoj pravougaonoj rešetki, tada postoji i najmanji takav petougao.

Prema tvrđenju 1, tačka A_1 , kao četvrto teme paralelograma $BAEA_1$ pripada pravougaonoj rešetki. Tačka O je centar petougla.



Slika 5

Važi da je:

$$\angle EA_1B = 108^\circ$$

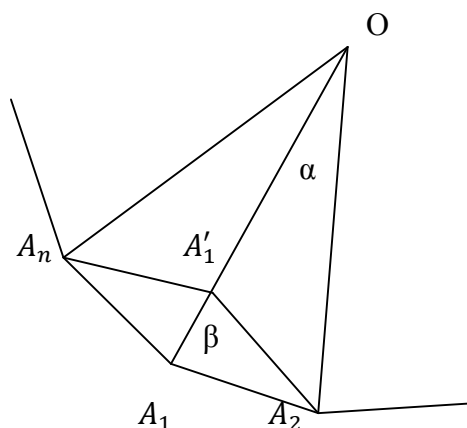
$$\angle EOB = 144^\circ.$$

Dakle, raspored je $A - O - A_1$. Slično ćemo dobiti i tačke B_1 , C_1 , D_1 i E_1 .

Ove tačke čine pravilan petougao koji je manji od petougla $ABCDE$, a razapet je na rešetki.

Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom, čime je tvrđenje dokazano za petougao.

Slično se pokazuje i za proizvoljan pravilan n-tougao ($n \geq 7$). Pretpostavimo da je $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ najmanji n-tougao koji se može razapeti na pravougaonoj rešetki (slika 6).



Važi da je:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha \leq \frac{360^\circ}{7} \quad \dots (1)$$

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

$$\beta \geq \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{7}}{2}$$

$$\beta \geq \frac{450^\circ}{7} \quad \dots (2)$$

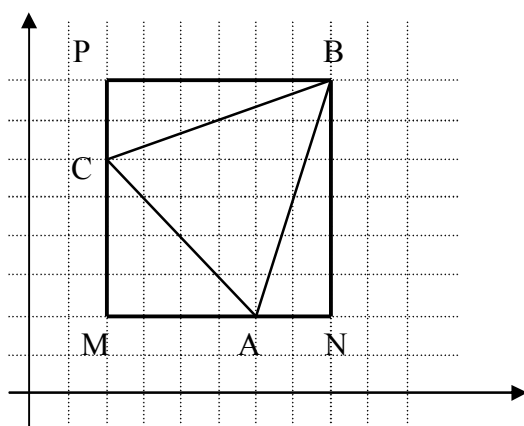
Iz (1) i (2) sledi $\alpha < \beta$. Dalje, sledi da je $\sphericalangle A_n A'_1 A_2 > \sphericalangle A_n O A_2$, pa je raspored $A_1 - A'_1 - O$. Slično ćemo dobiti i tačke $A'_2, A'_3, \dots, A'_n$. Ove tačke čine pravilan n-tougao razapet na pravougaonoj mreži, koji je manji od polaznog $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$, što je suprotno sa pretpostavkom. Time je dokaz završen. ♦

Tvrđenje 4: Ako n tačaka celobrojne rešetke predstavljaju temena pravilnog n-tougla ($n \geq 3$), tada je $n=4$.

Dokaz: Po prethodnom tvrđenju jednakostranični trougao, kvadrat i pravilni šestougao su jedini pravilni poligoni koji se mogu razapeti na nekoj pravougaonoj rešetki. Jasno je da se kvadrat može razapeti na celobrojnoj rešetki. Treba pokazati da se jednakostranični trougao i pravilni šestougao ne mogu razapeti na celobrojnoj rešetki.

Ako se pretpostavi da se na celobrojnoj rešetki može razapeti jednakostranični trougao ABC, stranice a . Tada je njegova površina $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Kako je $a^2 \in \mathbb{Q}$ broj to je površina trougla ABC iracionalan broj.



Slika 7

Sa druge strane ako se konstruiše pravougaonik MNBP kao na slici 7, tada je

$$P(\Delta ABC) = P(MNBP) - P(\Delta MAC) - P(\Delta ANB) - P(\Delta BPC),$$

pa je površina trougla ABC racionalan broj. Mera trougla ABC ne može istovremeno biti i racionalan i iracionalan broj, pa je pretpostavka neodrživa, tj. zaključak je da se jednakostranični trougao ne može razapeti na celobrojnoj rešetki.

Ako bi se na celobrojnoj rešetki mogao razapeti pravilan šestougao $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, onda bi na toj rešetki bio razapet i jednakostranični trougao $A_1A_3A_5$, a to je upravo pokazano da nije moguće.♦

II Pikova teorema

Definicija 4: Prebrojiva familija zatvorenih skupova $M = \{M_i | (i \in N)\}$ se naziva mozaik (mreža, teselacija, razbijanje), ako njihova unija pokriva celu ravan i ako svaka dva skupa iz familije imaju disjunktne unutrašnjosti, tj. ako je ispunjeno:

- 1) $\varepsilon^2 \subseteq \bigcup_{i \in N} M_i$
- 2) $I_n(M_i) \cap I_n(M_j) = \emptyset$, za sve $i, j \in N$, $i \neq j$.

Najčešće razmatrani mozaici su oni kod kojih su elementi familije M podudarne figure. Elemente skupa M se nazivaju elementarne ćelije, elementarne pločice ili samo ćelije. Za dve elementarne ćelije kažemo da su susedne ako imaju zajedničkih tačaka. Ivice ćelija predstavljaju grane mreže, a njihove krajnje tačke, tačke u kojima se susreću bar tri pločice, nazivaju se čvorovi (ili temena) mreže. Za poligon čija sva temena pripadaju skupu čvorova neke mreže kaže se da je razapet na toj mreži.

Ako su sve elementarne pločice mozaika podudarne tada kažemo da je mozaik jednotipni (monohedralni). Ako se sve pločice mogu podeliti u dve klase međusobno podudarnih pločica, tada govorimo o dvotipnom (dihedralnom) mozaiku i slično. Najpoznatiji primeri mreža u ravni su kvadratna, trougaona i heksagonalna koje se označavaju sa K , T , H redom. Ako je površina svih elementarnih pločica mreže M jednaka nekoj vrednosti k , tada se ta mreža označava sa M^k .

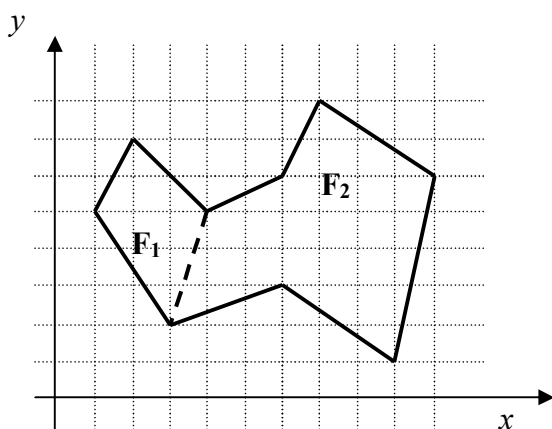
Za poligon F koji je razapet na proizvoljnoj rešetki može se uvesti funkcija

$$f(F) = \frac{1}{2}b(F) + i(F) - 1,$$

gde je sa $b(F)$ označen broj tačaka rešetke na ivicama poligona, a $i(F)$ broj tačaka rešetke koje pripadaju unutrašnjosti poligona.

1) Neka su F_1 i F_2 dva poligona sa zajedničkom stranicom i disjunktним unutrašnjostima, čija temena pripadaju skupu čvorova jedne od mreža K , T ili H . Za poligon koji je njihova unija tada važi:

$$f(F) = f(F_1) + f(F_2).$$



Slika 8

Dokaz: Po definiciji je

$$f(F_1) = \frac{b(F_1)}{2} + i(F_1) - 1$$

$$f(F_2) = \frac{b(F_2)}{2} + i(F_2) - 1.$$

Neka je k broj tačaka na zajedničkoj strani poligona F_1 i F_2 . Za poligon F koji predstavlja uniju poligona F_1 i F_2 vrednost funkcija $b(F)$ i $i(F)$ je:

$$b(F) = b(F_1) + b(F_2) - 2k + 2$$

$$i(F) = i(F_1) + i(F_2) + k - 2.$$

Ako se u formuli

$$f(F) = \frac{1}{2}b(F) + i(F) - 1$$

$b(F)$ i $i(F)$ zamene gore navedenim vrednostima, dobija se

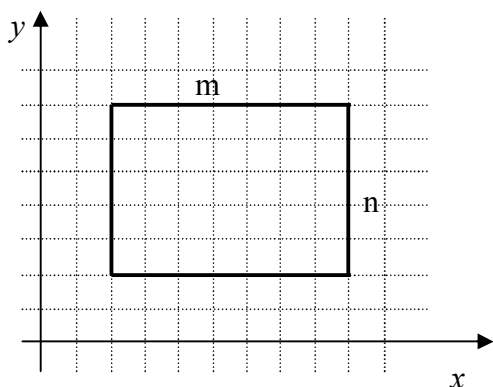
$$f(F) = f(F_1) + f(F_2). \blacklozenge$$

Prethodni dokaz ne zavisi od vrste mreže (kvadratna, trougaona, heksagonalna).

Površina poligona F označava se sa $P(F)$.

2) Neka je Π pravougaonik čija temena pripadaju skupu čvorova mreže K^1 sa stranama paralelnim koordinatnim osama. Tada je $P(\Pi) = f(\Pi)$.

Dokaz:



Slika 9

Neka je Π pravougaonik čije su stranice dužina m i n . Njegova površina je:

$$P(\Pi) = m \cdot n.$$

Broj tačaka $b(\Pi)$ na rubu pravougaonika je:

$$b(\Pi) = 2m + 2n.$$

U unutrašnjosti pravougaonika ima tačaka:

$$i(\Pi) = (m - 1) \cdot (n - 1).$$

Ako se vrednosti $b(\Pi)$ i $i(\Pi)$ zamene u formuli

$$f(\Pi) = \frac{1}{2}b(\Pi) + i(\Pi) - 1,$$

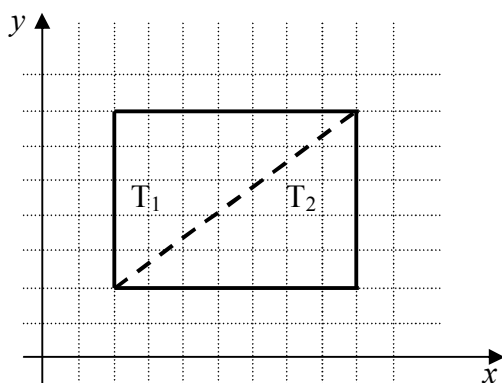
sređivanjem se dobija da je

$$f(\Pi) = m \cdot n,$$

čime je pokazano da je $P(\Pi) = f(\Pi)$. $\blacklozenge$

3) Neka je T pravougli trougao čija temena pripadaju skupu čvorova mreže K^1 sa katetama koje su paralelne koordinatnim osama. Onda je površina trougla T jednaka $f(T)$.

Dokaz: Neka je pravougaonik Π jednom od svojih dijagonala podeljen na dva pravougla trougla T_1 i T_2 , koji su podudarni sa trouglom T . Važi da je:



Slika 10

$$P(T_1) = P(T_2) = P(T)$$

$$b(T_1) = b(T_2) \dots (1)$$

$$i(T_1) = i(T_2) \dots (2)$$

Iz relacija (1) i (2) sledi:

$$f(T_1) = f(T_2) = f(T).$$

Važe sledeći identiteti (po prethodno dokazanom):

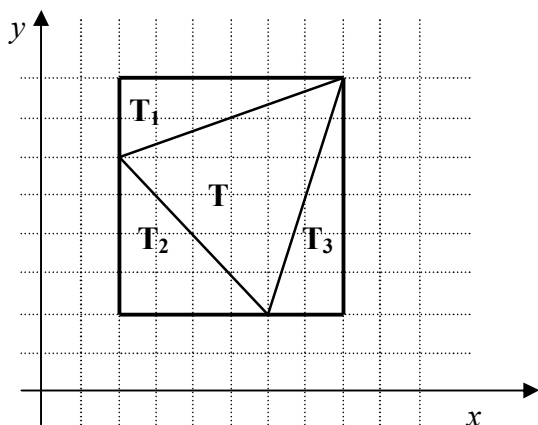
$$P(\Pi) = P(T_1) + P(T_2) = 2P(T)$$

$$f(\Pi) = f(T_1) + f(T_2) = 2f(T).$$

Kako je $P(\Pi) = f(\Pi)$, onda je i $P(T) = f(T)$.♦

3) Neka je T proizvoljan trougao razapet na kvadratnoj mreži K^1 . Tada je površina trougla T jednaka vrednosti $f(T)$.

Dokaz: Kroz temena trougla mogu se postaviti po dve prave paralelne koordinatnim osama, koje čine pravougaonik. Strane trougla dele pravougaonik na najviše tri pravougla trougla i sam taj trougao.



Slika 11

Ukoliko je neka od strana paralelna sa x ili y osom tada je neki od trouglova T_1 , T_2 , T_3 degenerisan. I takvi trouglovi će biti uzeti u razmatranje, pri čemu je vrednost funkcije f za takav trougao nula.

Iz zadataka 2 i 3, sledi da je:

$$f(\Pi) = P(\Pi) \dots (1)$$

$$f(T_1) = P(T_1) \dots (2)$$

$$f(T_2) = P(T_2) \dots (3)$$

$$f(T_3) = P(T_3) \dots (4)$$

Takođe važi da je

$$f(\Pi) = f(T_1) + f(T_2) + f(T_3) + f(T)$$

$$P(\Pi) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T).$$

Prema relaciji (1) je

$$f(T_1) + f(T_2) + f(T_3) + f(T) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T).$$

Iz relacija (2), (3) i (4) konačno je

$$f(T) = P(T). \blacklozenge$$

5) (**Pikova teorema**) Površina poligona F razapetog na celobrojnoj rešetki je jednaka

$$P(F) = \frac{b(F)}{2} + i(F) - 1,$$

gde $b(F)$ označava broj čvorova rešetke sa ruba poligona F , a $i(F)$ broj čvorova rešetke iz unutrašnjosti poligona F .

Dokaz: Neka je dat poligon F razapet na mreži. On se može razložiti na trouglove. Obeležimo sa n broj trouglova na koji je poligon F razložen. Prema zadatku 4 za svaki trougao T_i ($i \in 1, 2, \dots, n$) važi

$$f(T_i) = P(T_i).$$

Dalje, kako je

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(T_i)$$

$$f(F) = \sum_{i=1}^n f(T_i),$$

konačno je

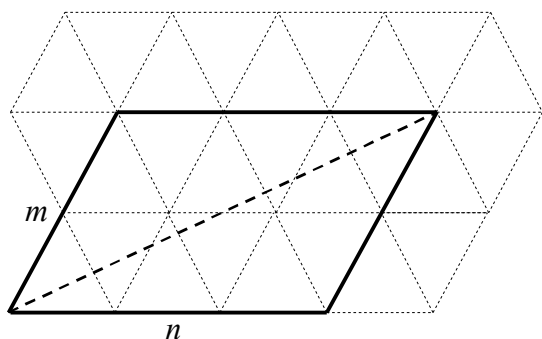
$$P(F) = f(F). \blacklozenge$$

6) Površina poligona razapetog na trougaonoj mreži T^1 (čije su sve elementarne ćelije jednakostranični trouglovi površine 1) je jednaka

$$P(F) = 2 \cdot f(F) = b(F) + 2 \cdot i(F) - 2,$$

gde $b(F)$ označava broj čvorova mreže T^1 sa ruba poligona F , a $i(F)$ broj čvorova iste mreže iz unutrašnjosti poligona F .

Dikaz: Posmatra se paralelogram čije strane pripadaju trougaonoj rešetki.



Slika 12

Neka paralelogram Π ima stranice m i n umnožaka rastojanja između susednih tačaka.

Površina paralelograma je

$$P(\Pi) = 2mn.$$

Na rubu paralelograma Π ima $b(\Pi)$ tačaka

$$b(\Pi) = 2m + 2n.$$

Unutar paralelograma Π ima $i(\Pi)$ tačaka

$$i(\Pi) = (m - 1) \cdot (n - 1).$$

Sada se lako pokazuje da je

$$f(\Pi) = \frac{b(\Pi)}{2} + i(\Pi) - 1 = mn.$$

Prema tome važi da je $P(\Pi) = 2f(\Pi)$.

Ako se posmatra trougao T čije dve stranice pripadaju trougaonoj mreži (polovina paralelograma), primenjujući postupak kao u zadatku 3, dobiće se da je

$$P(T) = 2f(T).$$

Proizvoljan trougao razapet na trougaonoj mreži se može dopuniti do paralelograma, pa ponavljajući postupak iz zadatka 4 dobija se da važi

$$P(T) = 2f(T).$$

Neka je dat poligon F , razapet na trougaonoj mreži. On se može razložiti na trouglove. Slično zadatku 5, dobiće se da je

$$P(F) = 2f(F). \blacklozenge$$

7) Ograničena figura F razapeta na heksagonalnoj mreži H^1 se naziva heksagonalni sistem ako je rub figure F sastavljen samo od grana heksagonalne mreže. Površina heksagonalnog sistema F razapetog na heksagonalnoj mreži H^1 (čije su elementarne ćelije pravilni šestouglovi površine 1) je jednaka

$$P(F) = \frac{1}{2}f(F) = \frac{1}{4}b(F) + \frac{1}{2}i(F) - \frac{1}{2},$$

gde $b(F)$ označava broj čvorova mreže H^1 sa ruba heksagonalnog sistema F , a $i(F)$ broj čvorova iste mreže iz unutrašnjosti heksagonalnog sistema F .

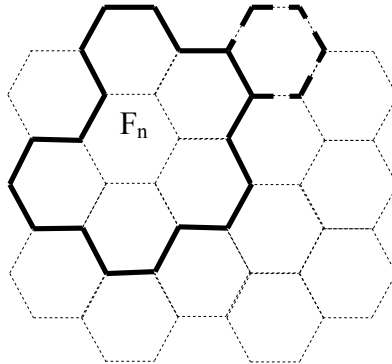
Dokaz: Neka je sa F_n obeležen heksagonalni sistem koji je sastavljen od n elementarnih ćelija. Dokaz se može izvesti matematičkom indukcijom po broju n . Za figuru F_1 koja je elementarna ćelija šestougona mreže važi

$$P(F_1) = 1, f(F_1) = 2,$$

tj. $P(F_1) = \frac{1}{2}f(F_1)$.

Neka za sve figure F_n važi da je $P(F_n) = \frac{1}{2}f(F_n)$.

Treba pokazati da je $P(F_{n+1}) = \frac{1}{2}f(F_{n+1})$.



Slika 13

Ako je nova ćelija u figuru F_{n+1} dodata tako da ima jednu zajedničku stranu sa nekom figurom F_n , onda je

$$\frac{1}{2}f(F_{n+1}) = \frac{b(F_n)+4}{4} + \frac{f(F_n)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(F_n) + 1 = P(F_n) + 1 = P(F_{n+1}).$$

Identično se razmatraju slučajevi kada nova ćelija ima dve, tri, četiri ili pet zajedničkih strana sa figurom F_n .

Dakle, važi $P(F) = \frac{1}{2}f(F)$.♦

8) Neka je ABC trougao čija su temena čvorovi celovrojne mreže, na čijem obimu nema drugih temena mreže osim tačaka A, B i C, a u unutrašnjosti je tačno jedana tačka celobrojne mreže O. Dokazati da je O težište trougla ABC.

Dokaz: Prema Pikovoj teoremi je:

$$P(\triangle AOB) = P(\triangle AOC) = P(\triangle BOC) = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}.$$

Dakle, duži AO, BO i CO dele trougao ABC na tri dela jednakih površina, pa je time O težište.♦

9) Temena n-tougla $A_1A_2A_3 \dots A_n$ su čvorovi celobrojne mreže. Koja je najmanja a koja je najveća površina koju takav n-tougao može imati?

Komentar: Prema Pikovoj teoremi je

$$P(F) = \frac{b(F)}{2} + i(F) - 1,$$

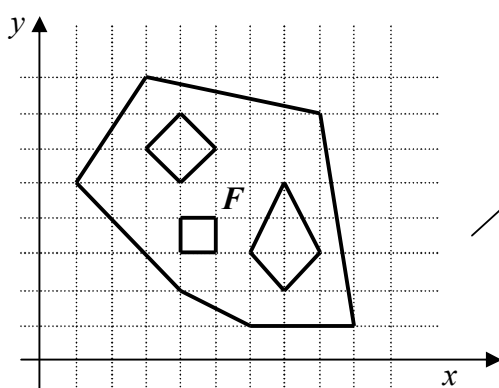
Da bi $P(F)$ bilo minimalno, $b(F)$ i $i(F)$ moraju biti najmanji mogući. Veličina $b(F)$ je najmanja ako osim temena na rubu nema drugih tačaka rešetke, a $i(F)$ može biti jednako nuli.

Slično, da bi n-tougao imao najveću moguću površinu potrebno je učiniti što većim veličine $b(F)$ i $i(F)$.♦

10) Ako je na celobrojnoj rešetki K^1 razapet poligon F sa n rupa onda se njegova površina može izračunati formulom

$$P(F) = \frac{b(F)}{2} + i(F) - 1 + n,$$

gde $b(F)$ označava broj čvorova rešetke sa ruba poligona F , a $i(F)$ broj čvorova rešetke iz unutrašnjosti poligona F . (bez dokaza!)



Slika 14

$$b(F) = 22$$

$$i(F) = 19$$

$$n = 3$$

$$P(F) = 11 + 19 - 1 + 3 = 32.$$

III George Alexander Pick

George Alexander Pick (1859 – 1942) je bio austrijski matematičar, jevrejskog porekla. Umro je nažalost u koncentracionom logoru. Formulu, danas poznatu kao Pikova teorema objavio je u jednom članku 1899. godine, a popularizovana je 1969. godine kada ju je Hugo Dyonizy Steinhaus uvrstio u ediciju Mathematical Snapshots.

Studirao je na Bečkom univerzitetu, gde je odbranio doktorat 1880. godine. Nakon toga radio je kao asistent na Praškom univerzitetu, gde je već 1881. postao predavač. Sledeća institucija u kojoj je radio je Univerzitet u Lajpcigu, samo 1984. godine. Vrlo brzo se vratio u Prag i tamo je ostao do penzionisanja 1927. godine, posle čega se vratio u rodni Beč.

Pik je predsedavao komitetom koji je postavio Ajnštajna za rukovodioca katedre za matematičku fiziku 1911 na tadašnjem Germanskom univerzitetu u Pragu. On je uputio Ajnštajna u radove italijanskih matematičara (Gregorio Ricci-Curbastro, Tullio Levi-Civita) u oblasti diferencijalnog računa, što je kasnije 1915. Ajnštajn sjajno iskoristio da uspešno formuliše Teoriju relativiteta.

Nakon aneksije Austrije u okvir Nemačke, Pik se 1938. ponovo preselio u Prag. Nacisti su ga smestili u logor 13. jula 1942., gde je i umro dve nedelje kasnije.