



ДИОФАНТ

ЕЛЕКТРОНСКИ ЧАСОПИС ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ



ГОДИНА I - БРОЈ 17
ВАЉЕВО – ЈАНУАР 2022.

ДИОФАНТ

Електронски часопис за
додатну наставу математике

Година 1.

Број 17

Ваљево, јануар 2022.

Уредник часописа:

др Војислав Андрић (voja.andric@gmail.com)

Издавач:

Математички клуб „Диофант“ Ваљево,

Поп Лукина 38

Телефон 065 291 22 00;

е – mail: diofant2020@gmail.com

Све прилоге, предлоге и примедбе слати путем електронских адреса:

diofant2020@gmail.com и voja.andric@gmail.com

Часопис је бесплатан

Излази повремено и по потреби

САДРЖАЈ

• Реч уредника	4
• Одабрани задаци	5
• Тема 317 – Пребројавање скупова бројева	6
• Тема 417 – Рачунске операције се природним бројевима	8
• Тема 517 – Разломци (2)	10
• Тема 617 – Дељивост. Прости бројеви	13
• Тема 717 – Метод последње цифре	15
• Тема 817 – Нелинеарне Диофантове једначине	18
• Диофантов математички додатак 1. – Нелинеарне Диофантове једначине	20



¹ Сви фотографије у овом броју електронског часописа „Диофант“ су делови једног од 600 бесолатних фрактала презентираних на сајту <https://pixabay.com/bg/images/search/фрактали/>

РЕЧ УРЕДНИКА

НОВА ГОДИНА – НОВЕ РУБРИКЕ У ЕЛЕКТРОНСКОМ ЧАСОПИСУ „ДИОФАНТ“

Од овог броја електронског часописа „Диофант“ уводимо две новине.

Прва је рубрика ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ, која ће третирати најзанимљивије задатке из свих тема које се обрађују у текућем броју. Број тих задатака ће увек бити тачно 10, а трудићемо се да међу датим, буду задаци за све узрасте. При излагању задатака првих неколико задатака могу решити и ученици млађих разреда. Препоручујемо да ученици старијих разреда реше све задатке. Уколико би смо имали помоћ ученика, учитеља и наставника, у наредним бројевима би објављивали и комплетна решења датих задатака. Та решења би објављивали на основу електронски добијених решења, онако како то аутор решења жели. Потпис може бити ауторски (име и презиме, школа. Место, а за ученике и разред) или под неким псеудонимом (на пример: Лаза 13, Лена математичарка, Диофант, Софија Жермен,...), Молимо заинтересоване ученике, учитеље и наставнике да нам своја решења шаљу путем наше е-mail адресе [diofant 2020@gmail.com](mailto:diofant2020@gmail.com) (најбоље у Word тексту, јер нам је то најлакше за објављивање; као слику читко исписаног решења снимљену мобилним телефоном; или неком трећем формату).

Друга рубрика је ДИОФАНТОВ МАТЕМАТИЧКИ ДОДАТАК у којој ћемо објављивати мало дуже текстове, који третирају целовите теме за додатну наставу математике и математичка . У овом броју електронског часописа „Диофант“ додатак ће бити текст Нелинеарне Диофантове једначине који третира решавање нелинеарних Диофантових једначина коришћењем алгебарских трансформација. За неки од следећих бројева „Диофанта“ припремамо као додатак Одабране задатке везане за број 2022 (са решењима). Врло радо ћемо објавити и друге целовите текстове које очекујемо од вас.

др Војислав Андрић

ОДБРАНИ ЗАДАЦИ

1. Колико има: а) троцифрених; б) петоцифрених бројева чији производ цифара је нула?
2. Неки број називамо срећним ако се између његових цифара могу уметнути знаци рачунских операција и заграде тако да вредност добијеног израза буде 100 (на пример број 98751 је срећан број јер је $9 \cdot 8 + 7 \cdot (5 - 1) = 100$). Докажи да су бројеви 123456 и 654321 срећни бројеви?
3. Бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 напиши у поља квадратне таблице 3×3 тако да је производ бројева у једном реду једнак броју који је написан са десне стране тога реда, а производ бројева у једној колони једнак броју који је написан испод те колоне (види слику).

			20
			108
			168
42	80	108	

4. Имамо лењир дужине 9 *cm* на коме нема обележених подеока. Како треба обележити само три подеока познате дужине, тако да се помоћу лењира могу измерити све дужи чије су дужине природни бројеви од 1 *cm* до 9 *cm* ?
5. Користећи сваку од цифара 1, 2, 3, ..., 7, 8, 9 само по једном написати неколико простих бројева. Конструирај бар један такав скуп простих бројева. Колики је најмањи могући збир тако добијених простих бројева?
6. Одреди једноцифрене бројеве a , b и c , тако да је $\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}$.
7. Одреди збир свих простих бројева који се не могу написати у облику збира два сложена броја.
8. Да ли је број $2^9 + 2^{99}$ дељив са: а) 320; б) 3200?
9. Решите систем једначина $x_1 + x_2 + \dots + x_k = x_1 x_2 \dots x_k = 2022$ (k је природан број већи од 1) у скупу природних бројева? Одреди најмању и највећу вредност броја k .
10. Да ли систем једначина $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = x_1 x_2 \dots x_k = 2022$ има решења у скупу природних бројева? Образложите решење.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

3. РАЗРЕД

ТЕМА 317²

ПРЕБРОЈАВАЊЕ СКУПОВА БРОЈЕВА

1. Број 121 садржи цифре 1 и 2. Колико има троцифрених бројева у чијем декадном запису су само цифре 1 и 2?
2. Колико има троцифрених природних бројева код којих је разлика цифре стотина и цифре јединица једнака 8?
3. Колико има троцифрених бројева код којих је збир цифара једнак: а) 4; б) 24?
4. Колико има троцифрених бројева код којих је производ цифара једнак а) 12; б) 56?
5. Збир цифара неког броја је 7. Прва цифра тог броја је 1, а свака следећа није мања од претходне. Колико таквих двоцифрених и троцифрених бројева има?
6. Производ цифара природног броја мањег од 1000 је 8. Колико има таквих природних бројева?
7. Од града А до града В воде 3 пута, а од града В до града С четири пута. На колико начина се може од града А допутовати у град С, ако се путује преко града В?
8. Колико има двоцифрених бројева код којих је цифра десетица 1, 2 или 3, а цифра јединица 4, 5, 6 или 7?
9. Колико има: а) једноцифрених; б) двоцифрених; в) троцифрених природних бројева?
10. У броју 237 цифра јединица је 7. Колико има троцифрених бројева чија је цифра јединица једнака 7?
11. У броју 345 цифра стотина је 3. Колико има троцифрених бројева чија је цифра стотина 3?
12. Колико има троцифрених бројева чија је прва цифра 5, а последња цифра 8?
13. У троцифреном броју АВС цифре А и С су парне, а цифра В је непарна. Колико таквих троцифрених бројева има ако се цифре: а) не могу понављати; б) могу понављати?

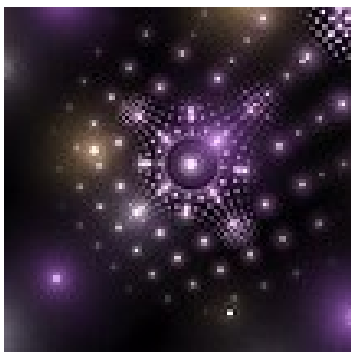
²

У првом полугодишту смо реализовали 15 тема. Као шеснаесту тему сматрамо одабране задатке везане за број 2022, односно 202, тако да у овом броју реализујемо 17. тему за све разреде

14. У броју 864 све цифре су парне. Колико има троцифрених бројева чије су све цифре парне, ако се цифре: а) не могу понављати: б) могу понављати?
15. Колико има троцифрених бројева који су дељиви са 5, ако се цифре: а) не могу понављати: б) могу понављати?
16. Бројеви 88, 575, 777 се називају палиндроми и читају се с лева у десно исто као и с десна у лево. Колико има двоцифрених, а колико троцифрених палиндрома?
17. Колико има троцифрених бројева чији је збир цифара непаран?
18. Колико има троцифрених троцифрених бројева чији је производ цифара паран?
19. Колико бројева има у низу 7, 14, 21, 28 ... 77, 84, 91?
20. Колико бројева има у низу 3, 7, 11, 15, ... , 97, 99?
21. Одредити збир бројева $22 + 25 + 28 + 31 + \dots + 73 + 76 + 79 + 82$.
22. На математичком такмичењу такмичарски бројеви ученика трећег разреда су прављени по следећем систему. Најмањи такмичарски број је био 37, а следећи је био 43, па следећи 49 и ... сваки следећи ученик трећег разреда - учесник такмичења је имао такмичарски број за 6 већи од претходног. Колико је учесника из трећег разреда имало то такмичење, ако је највећи такмичарски број био 373?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Колико има троцифрених природних бројева код којих је збир цифре стотина и цифре јединица једнак 16?
- 2) Колико има троцифрених бројева код којих је збир цифара једнак 5?
- 3) Колико има троцифрених бројева код којих је производ цифара једнак 9?
- 4) Колико има троцифрених бројева чија је цифра јединица 0, 1, 2, 3; цифра десетица 4, 5, 6 и цифра стотина 7, 8, 9?
- 5) Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара једнак 0?





ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

4. РАЗРЕД

ТЕМА 417 РАЧУНСКЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА

- Одреди разлику највећег и најмањег седмоцифреног парног броја написаног помоћу цифара 0, 3, 5, 7 и 8 у коме се ниједна цифра не појављује више од два пута.
- Дати су бројеви 35246, 42385, 45263 и 75234, Ако у сваком од тих бројева цифре 4 и 5 замене места који од бројева ће се највише увећати и за колико?
- У наредну таблицу уписати недостајуће бројеве тако да збир свака три суседна броја буде једнак

	345							222	876	
--	-----	--	--	--	--	--	--	-----	-----	--

- Допиши један пар заграда тако да буде тачна једнакост: $2021 \cdot 287 - 2009 : 7 = 0$
- Израчунај $209 \cdot 208 - 208 \cdot 207 - 2 \cdot 207$.
- Бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 напиши у поља квадратне таблице 3×3 тако да је производ бројева у једном реду једнак броју који је написан са десне стране тога реда, а производ бројева у једној колони једнак броју који је написан испод те колоне (види слику).

			20
			108
			168
42	80	108	

- Допуни израз $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ знаковима рачунских операција (без коришћења заграда) тако да се добије тачна једнакост. Колико има решења?

8. Између цифара у изразу $9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 - 3 \cdot 2 - 1 = 1995$ поставити заграде тако да се добије тачна једнакост.
9. Збир шест различитих природних бројева је 22. Одреди о којим бројевима је реч?
10. Одредити пет природних бројева чија је сума 20, а производ 420.
11. Број 120 је једнак збиру неколико природних бројева чији је производ такође 120. Колико најмање, а колико највише таквих бројева има?
12. Број 30 напиши као вредност три бројевна израза од којих сваки садржи по три исте цифре. Дозвољено је коришћење свих рачунских операција, заграда и слепљивање цифара.
13. За природне броје a , b и c важи једнакост $a - b + c = 2021$. Колика ће бити вредност израза $a - b + c$, ако се сваки од бројева a , b и c : а) повећа за 333; б) умањи за 444?
14. Влада, Нада и Јагода су били у куповини. Влада и Нада су потрошили 2021 динар, Влада и Јагода 3022 и Нада и Јагода 4023 динара. Колико новца је потрошио свако од њих?
15. Дешифруј множење: $AAA \cdot B = 1998$.
16. Зграда има три спрата. На првом и другом спрату живе укупно 22 особе, а на другом и трећем спрату живи 20 особа. Колико људи станује у тој згради ако је број особа на другом спрату једнак укупном броју особа на првом и трећем спрату.
17. Збир два броја је 52. Ако се први увећа 11 пута, збир ће бити 152. О којим бројевима је реч?
18. Пера је требао да дати број помножи са 15 и сабре са 4. Међутим он је непознати број помножио са 4 и сабрао га са 15. Занимљиво је да се у оба случаја добије исти резултат. Који број је дат?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Имамо лењир дужине 9 *cm* на коме нема обележених подеока. Како треба обележити само три подеока познате дужине, тако да се помоћу лењира могу измерити све дужи чије су дужине природни бројеви од 1 *cm* до 9 *cm* ?
- 2) На игралишту има босоногих дечака исто колико девојчица у патикама. Да ли је на игралишту више босоноге деце или девојчица?
- 3) Збир три узастопна природна броја је x , а збир следећа три узастопна броја је y . Може ли производ x и y бити 111 111 111?
- 4) Упореди бројеве $A = 2011 \cdot 20122012 \cdot 201320132013$ и $B = 2013 \cdot 20112011 \cdot 201220122012$.
- 5) Дешифровати $(AA + AA + 1) \cdot A = AAA$.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

5. РАЗРЕД

ТЕМА 517. РАЗЛОМЦИ (2. ДЕО)

1. Упореди разломке: $\frac{399}{799}$ и $\frac{3999}{7999}$.
2. Израчунај: а) $333 \cdot \left(\frac{17}{111111} + \frac{967}{222222} - \frac{2}{777} \right)$ б) $\left(\frac{131313}{686868} + \frac{1648}{1751} \right) \cdot \left(\frac{1648}{1751} - \frac{131313}{686868} \right) : 2 \frac{1}{16}$
3. Одреди све природне бројеве n за које важи: $\frac{1}{3} < \frac{n-1}{5} < \frac{11}{12}$.
4. Који број треба одузети од бројиоца и додати имениоцу разломка $\frac{57}{23}$, да се добије разломак једнак $\frac{3}{5}$?
5. Именилац разломка $\frac{4}{7}$ је увећан за 28. За колико треба увећати бројилац да се разломак не промени?
6. Која два разломка са двоцифреним имениоцима имају збир једнак $\frac{103}{2002}$?
7. Разлика два броја је $\frac{1}{3}$, а њихов количник такође $\frac{1}{3}$. Који су то бројеви?
8. Одреди три разломка чији су имениоци прости бројеви ако је збир тих разломака $\frac{53}{30}$.
9. Одреди једноцифрене бројеве a , b и c , тако да је $\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}$.
10. Одреди најмањи природан број који подељен сваким од разломака $\frac{5}{17}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{9}{35}$ даје природан број.
11. Израчунај најмањи разломак чији је количник при дељењу и са $\frac{55}{252}$ и са $\frac{44}{315}$ природан број.

12. Одреди највећи број, такав да, ако се бројеви $\frac{45}{28}$ и $\frac{75}{98}$ њим поделе, количник буде природан број.
13. Решити једначину $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 2007$.
14. Израчунај збир $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$.
15. Дати су разломци $a = \frac{12}{25}$ и $b = \frac{37}{73}$. Увери се да важи неједнакост: $a < \frac{a+b}{2} < b$. Да ли дата неједнакост важи само за дате бројеве a и b , или важи за све бројеве a и b , за које је $a < b$?
16. Одреди разломак једнак са $\frac{7}{13}$, код кога је збир бројиоца и имениоца једнак 140.
17. Одреди природан број n и прост број p тако да важи $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$. Колико различитих решења има проблем?
18. Збир половине, трећине и седмине неког броја је за 1 мањи од тог броја. Који је то број?
19. У празна поља (види слику) уписати разломке тако да зборови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

		$\frac{4}{5}$
$\frac{7}{10}$		
		0,4

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Упореди разломке: $\frac{98}{987}$ и $\frac{987}{9876}$.
- 2) Бројилац једног разломка је $\frac{2}{3}$ имениоца. Ако бројиоцу додамо 3, а имениоцу 15, добијамо $\frac{1}{3}$. Одреди полазни разломак.
- 3) Да ли је тачна неједнакост: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101} < 1$.

- 4) а) Разломак $\frac{999}{1994}$ представи као збир два разломка се једноцифреним бројиоцима.
- б) Одреди два разломка се двоцифреним имениоцима, тако да је њихов збир $\frac{145}{1998}$.
- 5) У празна поља (види слику) уписати разломке тако да зборови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

		$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$		
		0,4





ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

6. РАЗРЕД

ТЕМА 617

ДЕЉИВОСТ. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЈЕВИ

1. Производ три узастопна цела броја је 2688. О којим бројевима је реч?
2. Разломак $281/140$ приказати као збир три разломка са једноцифреним имениоцима,
3. Дат је природан број $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50$. Одреди најмањи природан број који се не садржи у n .
4. Ако је n природан број, онда је $(10n + 35)/45$ такође природан број.
5. Производ два природна броја је 1350, а њихов НЗД је 15. О којим бројевима је реч?
6. Производ два троцифрена броја записује се само помоћу неколико тројки. О којим троцифреним бројевима је реч?
7. Да ли је тачно тврђење: Збир два сложена броја је увек сложен број?
8. Одреди све просте бројеве p такве да је $1/3 < p/12 < 3/4$.
9. Сви прости бројеви већи од 3 су облика $4k + 1$ или облика $4k + 3$. Докажи.
10. Сви прости бројеви већи од 3 су облика $6k + 1$ или облика $6k - 1$. Докажи.
11. Одредити све просте бројеве p , такве да су p , $p + 14$ и $p + 28$ прости бројеви.
12. Постоји ли природан број n ($n > 2023$), такав да су бројеви $n - 2020$, n и $n + 2020$ прости?
13. Да ли је скуп простих бројева коначан или бесконачан?
14. Одреди све просте бројеве p , такве да је $8/63 < 1/p < 2/5$.
15. Одедити све целе бројеве n такве да је $24/(3n - 4)$ такође цео број.
16. Колико има простих бројева који се не могу написати као збир два сложена броја?

17. Збир два проста броја је прост број, а њихова разлика је такође прост број. О којим бројевима је реч?
18. Користећи сваку од цифара 1, 2, 3, ..., 7, 8, 9 само по једном написати неколико простих бројева. Конструирати бар један такав скуп простих бројева. Колики је најмањи могући збир тако добијених простих бројева?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Колико има троцифрених простих бројева чије су све цифре прости бројеви?
- 2) За природне бројеве x и y НЗД је 12, а НЗС је 144. О којим бројевима је реч? Колико решења има?
- 3) Постоје ли прости бројеви p и q такви да је:
а) $2p + 3q = 45$; б) $2p + 3q = 56$?
- 4) Може ли се: а) првих девет простих бројева; б) првих девет непарних простих бројева распоредити у поља квадрата 3×3 тако да се добије магични квадрат?
- 5) Четири ученика су о броју написаном на екрану дали следеће изјаве:
Пера: На екрану је написан број 9.
Жика: На екрану је написан прост број.
Милка: На екрану је написан паран број.
Наташа: На екрану је написан број који је дељив са 15.
Један ученик и једна ученица су дали тачне, а других двоје ученика нетачне одговоре.
Који број је био записан на екрану?





ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

7. РАЗРЕД

ТЕМА 717 МЕТОД ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

Последња цифра у запису природног или целог броја је понекад веома корисна за решавање многих математичких проблема. У претходним темама истраживана је последња цифра квадрата целих бројева. Циљ ове теме је да се кроз наредне примере (и задатке који следе) покаже како се истраживањем последње цифре још неких карактеристичних бројева решавају проблеми дељивости, једначине са целобројним променљивим ... и како последња цифра може бити корисна и у другим ситуацијама.

ПРИМЕР 1. Којим цифрама се завршавају квадрати природних (и целих) бројева?

РЕШЕЊЕ: Сви природни бројеви се завршавају цифрама 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Њихови квадрати се завршавају цифрама 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, па се квадрати целих бројева завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Дакле, квадрати целих бројева се никада не завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8.

ПРИМЕР 2. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 6^y = 9\,876\,543$?

РЕШЕЊЕ: Како се број x^2 завршава неком од цифра 0, 1, 4, 5, 6, 9 а број 6^y увек завршава цифром 6, то се број $x^2 + 6^y$ може завршавати само цифрама 0 + 6, 1 + 6, 4 + 6, 5 + 6, 6 + 6, 9 + 6, дакле цифрама 6, 7, 0, 1, 2, 5. Закључујемо да се $x^2 + 6^y$ не завршава цифром 3, па не постоје природни бројеви који задовољавају дату једнакост.

ПРИМЕР 3. Да ли је број $3^{2020} + 4^{2019} + 5^{2018}$ дељив са 10?

РЕШЕЊЕ: Број $3^4 = 81$ завршава се цифром 1, па се и број $(3^4)^m$, односно 3^{2020} завршава цифром 1. Број 4^n се завршава или цифром 4 (ако је n непарно) или цифром 6 (ако је n парно), па се број 4^{2019} завршава цифром 4. Број 5^k се увек завршава цифром 5. То значи да је посматрани број $3^{2020} + 4^{2019} + 5^{2018}$ једнак $\dots 1 + \dots 4 + \dots 5 = \dots 0$. Како је последња цифра збира нула, то је број $3^{2020} + 4^{2019} + 5^{2018}$ дељив са 10.

ПРИМЕР 4. Има ли једначина $m^4 + n^4 = 33333333$ решење у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Ако је k цео број, онда се k^2 завршава цифрама 0, 1, 4, 5, 6, 9, а k^4 се завршава цифрама 0, 1, 5, 6. Последња цифру збира $m^4 + n^4$ се може приказати следећом таблицом:

$m^4 \downarrow$	$n^4 \rightarrow$	0	1	5	6
0		0	1	5	6
1		1	2	6	7
5		5	6	0	1
6		6	7	1	2

Из добијене таблице је јасно да се збир $m^4 + n^4$ увек завршава цифрама 0, 1, 2, 5, 6 и 7 и никада не завршава цифрама 3, 4, 8 и 9. Према томе $m^4 + n^4$ се никада не завршава цифром 3 и дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

ПРИМЕР 5. Одреди природне бројеве x и y такве да је $x! + 35y = 9789$.

РЕШЕЊЕ: Број $k!$ се завршава цифрама 1, 2, 4, 6 и 0. Како се број $35y$ завршава цифрама 0 или 5, то се $x!$ завршава цифрама $9789 - \dots 0 = \dots 9$ или $9789 - \dots 5 = \dots 4$. Једини факторијел чија је последња цифра 4 је $4! = 24$, па је $x = 4$. Дакле, $24 + 35y = 9789$, па је $35y = 9765$ и $y = 9765 : 35 = 279$.

ЗАДАЦИ

- Којим се цифрама се може завршавати запис производа два узастопна природна броја?
- Написана је једнакост $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = 44444444444444$. Да ли је она могућа?
- Ако је k природан број, којим цифрама се завршавају бројеви $1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k, 6^k, 7^k, 8^k$ и 9^k ?
- Докажи да је број $3^{2019} + 8$ дељив са 5, а није дељив са 10.
- Одреди најмањи природан број n такав да израз $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ није дељив са 5.
- Докажи да је број $m = 6^{555} + 7^{555} + 8^{555} + 9^{555}$ дељив са 10.
- Да ли једначина $9^n + 11^n = 4^n$ има решење у скупу природних бројева?
- За које вредности природног броја n је израз $7^n - 1$ дељив са 10?
- Постоје ли природни бројеви x, y и z такви да је $5^x + 6^y + 7^z = 666666$?
- Одреди сва решења једначине $x! + y! = 5046$ у скупу природних бројева.
- Докажи да, ако је $n > 1$, онда је $n!$ паран и ако је $n > 4$ онда је $n!$ дељив са 10.
- Да ли је број $m = 1^{2020} + 2^{2020} + 3^{2020} + 4^{2020}$ дељив са 10?
- Докажи да је број $(7^7)^7 + 3$ дељив са 10.
- Постоје ли природни бројеви n и k такви да је $5^n + 6^n + 7^n + 8^n = 10k$?
- Докажи да је израз $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ дељив са 10 за сваки природан број n .

16. Да ли је број $2^9 + 2^{99}$ дељив са 800?
17. Ако су x и y природни бројеви, онда једначина $x! + y! = 201920192019$ нема решења. Докажи.
18. Колико решења има једначина $1! + \dots + x! = y^2$, ако су x и y природни бројеви?
19. Одреди сва решења једначине $x! + y! = z!$ у скупу природних бројева.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Докажи да је број $24^{24} + 24$ дељив са 100.
- 2) Ако је p прост број, тада је $p^{2018} + 2019$ сложен број. Докажи.
- 3) Доказати да једначина $x^4 + 5^y + z^{2020} = 348934893489$ нема решења у скупу целих бројева.
- 4) Решити у скупу природних бројева једначину $2x^2 + y! = 6051$.
- 5) Одреди последње три цифре броја $n = 2^{2008} - 2^{2006} + 2^{2003}$.





ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

8. РАЗРЕД

ТЕМА 817

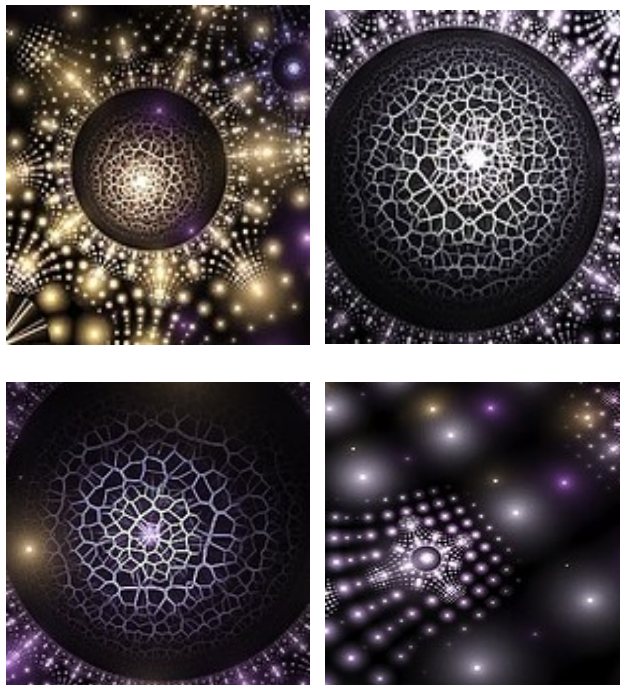
НЕЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

У седмом разреду било је говора о решавању Диофантових једначина коришћењем последње цифре, производа, количника, збира, (не)парности, особина дељивости и неједнакости. Циљ ове теме је да се на примерима изврши обнављање и продубљивање наведених садржаја.

1. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^4 + y^4 = 5(x^3 + y^3) + 29$?
2. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $xy + 2x + 3y = 47$.
3. Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^4 - y^4 = 175$.
4. Реши једначину $x^3 + 2x = y^4 + 3x^2 + 2$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).
5. Одреди све природне бројеве x и y тако да је $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$.
6. Дата је једначина $xyz + xy + yz + xz + x + y + z = 5$. Колико решења у скупу целих бројева има дата једначина?
7. Реши једначину $x^2 + 2y = 2xy$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).
8. Докажи да једначина $x^2 - xy + y^2 = z^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.
9. Реши једначину $x^2 + xy + y^2 = 7$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).
10. Постоје ли прости бројеви p и q такви и да је $p^3 + q^3 = r^3$?
11. Реши једначину $x^2 + y^2 + z^2 = 2020$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$).
12. Дата је једначина: $xyz = xy + yz + xz$. Колико решења у скупу:
а) природних бројева; б) целих бројева има дата једначина?
13. Реши једначине: а) $x^3 + y^3 = xy + 61$; б) $x^3 - y^3 = xy + 61$ ($x, y \in \mathbb{N}$).
14. Колико целобројних решења има једначина $x^3 - y^3 = x + 6y^2 + 11y + 6$?
15. Реши једначину $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 18y^3 + 7$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).
16. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $35 \cdot x! \cdot y! = (x + y)!$
17. Одреди све природне бројеве n такав да једначина $n(x! + y!) = z!$ има јединствено решење у скупу природних бројева.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Докажи да једначина $x^3 + y^3 - z^3 = 1$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.
- 2) Реши једначину $x^2 + xy + y^2 = 49$; $(x, y \in \mathbb{Z})$.
- 3) Постоје ли прости бројеви p, q и r такви да је $p^3 + q^3 = r^3$?
- 4) Реши једначину $x^2 + y^2 + z^2 = 2020$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$).
- 5) У скупу целих бројева реши једначину $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y$.



ДИОФАНТОВ МАТЕМАТИЧКИ ДОДАТАК

БРОЈ 1.

НЕЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Овај Диофантов математички додатак је посвећен Диофантовим једначинама и њиховом решавању коришћењем алгебарских трансформација. Наиме, алгебарске трансформације су средство којим се полазна Диофантова једначина доводи на еквивалентан облик погодан за разликовање случајева. Како то конкретно изгледа и када се као средство користи производ, количник, збир, неједнакост, парност, дељивост или нешто друго, илуструју примери и проблеми који следе. При том је важно имати на уму једноставну чињеницу да све карактеристичне особине које има једна страна и друга страна једнакости.

КОРИШЋЕЊЕ ПРОИЗВОДА

Као инструмент за разликовање могућих случајева при решавању Диофантових једначина често се користи производ. Први корак у решавању је трансформација бар једне стране једначине (зависно од случаја) у облик погодан за факторизацију како леве, тако и десне стране једнакости. Најповољнија ситуација је уколико се једначина може написати у облику производа неколико израза $A(x, y \dots) \cdot B(x, y \dots) \cdot \dots \cdot M(x, y \dots) = n$, који садржи факторизован полином на једној и константу растављену на чиниоце с друге стране једнакости.

ПРИМЕР 6. Одреди све природне бројеве x и y такве да је $x^2 - y^2 = 124$.

РЕШЕЊЕ: Из $x^2 - y^2 = 124$, следи да је $(x + y)(x - y) = 124$. Чиниоци $(x + y)$ и $(x - y)$ су бројеви исте парности (докажи). У овом случају они не могу бити непарни, јер би тада и њихов производ био непаран. Ако се број 124 растави на чиниоце добија се $124 = 1 \cdot 124 = 2 \cdot 62 = 4 \cdot 31$ и јасно је да постоји само једна могућност: $x + y = 62$ и $x - y = 2$. Дакле, $2x = 64$ и $x = 32$. Једино решење је $(x, y) = (32, 30)$.

ПРИМЕР 7. Одреди све целе бројеве x и y који задовољавају једнакост $xy + 3x - 5y = 18$.

РЕШЕЊЕ: Дата једначина $xy + 3x - 5y = 18$ еквивалентна је са једначином $xy + 3x - 5y - 15 = 3$, односно $(x + 3)(y - 5) = 3$. Како је број 3 прост број, разликују се следеће могућности:

- 1) $x + 3 = 1, y - 5 = 3 \Rightarrow x = -2, y = 8$;
- 2) $x + 3 = -1, y - 5 = -3 \Rightarrow x = -4, y = 2$;
- 3) $x + 3 = 3, y - 5 = 1 \Rightarrow x = 0, y = 6$;
- 4) $x + 3 = -3, y - 5 = -1 \Rightarrow x = -6, y = 4$.

ПРИМЕР 8. Одреди природне бројеве x и y такве да је $xy + x + y = 2^{32}$.

РЕШЕЊЕ: Ако се и на леву и на десну страну једначине дода 1 добија се $xy + x + y + 1 = 2^{32} + 1$ и после трансформације у производ једначина постаје $(x + 1)(y + 1) = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$. Значи да једначина у скупу природних бројева има само два решења и то: $(640, 6\,700\,416)$ и $(6\,700\,416, 640)$.

За број $2^{32} + 1$ везана је занимљива прича. Чувени француски математичар Пјер Ферма (1601 – 1665) је у једној од својих многобројних хипотеза написао да су бројеви 3, 5, 17, 257, ..., тј. сви бројеви облика $2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$), који су у математичкој литератури познати као Фермаови бројеви, прости.

Међутим, Леонард Ојлер је 1732. године доказао да је пети Фермаов број $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,2978$ сложен број. и нашао његове чиниоце 641 и 6 700 417.



Производ се успешно користи нарочито у случајевима када једна од страна једнакости представља производ простих бројева, без обзира да ли се ради о константама или променљивим. Илустрација таквог једног случаја је следећи пример.

ПРИМЕР 9. Одреди све просте бројеве p тако да је $2p + 1$ седми степен неког природног броја.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени природни број n . Према условима задатка је $2p + 1 = n^7$, па је n непаран природан број. Из $2p + 1 = n^7$ следи једнакост $n^7 - 1 = (n - 1)(n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) = 2p$. Како су 1, 2, p и $2p$ једини чиниоци броја $2p$, то су могући следећи случајеви:

- 1) Ако је $n - 1 = 1$, онда је $n = 2$, што није могуће, јер је већ речено да је n непаран број;
- 2) Ако је $n - 1 = 2$, онда је $n = 3$ и $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1093 = p$. Како је 1093 прост број, то је уређени пар $(n, p) = (3, 1093)$ једно решење проблема.
- 3) Ако је $n - 1 = p$, онда је $n = p + 1 \geq 3$. Како је $n \geq 3$, то је вредност израза $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ већа од 2 и у овом случају нема решења.
- 4) Ако је $n - 1 = 2p$, онда је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n = 0$, што је немогуће, јер је n природан број.

ПРИМЕР 10. Одреди све природне бројеве x такве да је $2^x + 1$ квадрат природног броја.

РЕШЕЊЕ: Ако је $2^x + 1 = y^2$, онда је $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1) = 2^x$. Једини чиниоци броја 2^x су степени броја 2. Нека је $2^x = 2^a \cdot 2^b$ ($a \geq b$), где је $a + b = x$. Тада је $y + 1 = 2^a$ и $y - 1 = 2^b$, па је $2^a - 2^b = 2$. Следи да је $2^b(2^{a-b} - 1) = 2$. Јасно је да је $2^b = 2$ и $2^{a-b} - 1 = 1$, па је $b = 1$ и $a - b = 1$. Дакле, $a = 2$, $b = 1$ и $x = a + b = 3$. Тада је $y^2 = 2^3 + 1 = 9 = 3^2$, па је $y = 3$.

ПРИМЕР 11. Докажи да број $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ није квадрат природног броја ни за један природан број n .

РЕШЕЊЕ: Како је $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2(n^2 + 2n + 1) + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 1) = (n + 1)^2(n^2 + 1)$, то је добијени број потпун квадрат само ако је $n^2 + 1$ потпун квадрат, то јест $n^2 + 1 = a^2$. Тада је $a^2 - n^2 = 1$, тј. $(a - n)(a + n) = 1$. Следи да је $a - n = a + n = 1$, одакле је $a = 1$ и $n = 0$, што није могуће, јер $n = 0$ није природан број.

ЗАДАЦИ

1. Одреди све уређене парове (x, y) целих бројева x и y за које је $xy + 2x = 7$.
2. Ако су x и y цели бројеви решити једначину $x^2 - y^2 = 12$. Колико таквих бројева има?
3. Колико целобројних решења има једначина $x^2 - y^2 = 146$?

4. Одреди све парове целих бројева (x, y) такве да је:
 - a) $x^2 - 5 = 2xy$;
 - b) $x^4 - y^4 = 15$;
 - c) $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$;
 - d) $x^2 + 6y = y^2 + 4x + 10$.
5. Одреди природан број n и прост број p тако да је $p = n^4 + 4$.
6. Одреди природан број n тако да је $n^2 + 2n + 13$ квадрат неког природног броја.
7. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$?
8. Одреди природан број n и прост број p тако да је $5p + 1 = n^2$.
9. Постоје ли прост број p и цео број n тако да се прост број p може приказати у облику $8n^2 + 10n + 3$?
10. Одреди све парове целих бројева x и y тако да је њихов производ 5 пута већи од њиховог збира .
11. Одреди све правоугле троуглове са целобројним страницама чија је једна катета $a = 9$.
12. Постоје ли прост број p и природан број k за које је: а) $7p + 1 = k^3$; б) $7p - 1 = k^3$?
13. Одреди целе бројеве a, b и c такве да је $abc + ab = a + ac + 3$.
14. Постоје ли прост број p и природан број k такви да је $k^3 - 3k = p - 2$?
15. Ако су n и m природни и p прост број решити следеће једначине:
 - a) $2p^2 + 1 = n^5$;
 - b) $n^4 + n^2 + 1 = p$;
 - c) $n^4 + 4m^4 = p$.
16. Дата је једначина $x^2 - y^2 = 2^{2020}$. Колико решења у скупу природних бројева има дата једначина?
17. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ има бесконачно много решења. Докажи.
18. Ако је m природан број, онда једначина $x^2 + 2xy + y^2 - mx - my - m = 1$ има тачно m решења у скупу природних бројева. Докажи.
19. Одреди све природне бројеве који се не могу представити у облику збира неколико (најмање два) узастопних природних бројева.
20. На колико начина се број 2019 може представити у облику збира узастопних природних бројева?
21. Одреди све просте бројеве p и q тако да је $p^2 - 2q^2 = 1$.
22. Постоје ли цели бројеви a, b, c и d такви да је $ab + cd = 14$ и $ac + bd = 11$?
23. Одреди природне бројеве n и m тако да је: $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 100! = n! \cdot m^2$.
24. Ако су x, y и z цели бројеви, одреди бар једно решење једначине $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 6$.



КОРИШЋЕЊЕМ КОЛИЧНИКА

Један од начина за раздвајање могућих случајева при решавању Диофантових једначина је и коришћење количника и анализа његове целобројности. Идеја је да се једначина $A = B$, низом трансформација преведе у облик $M = N + \frac{P}{Q}$. Ако су M и N цели бројеви, онда то мора бити и $\frac{P}{Q}$, што значи да се Q мора садржати у P . Анализом могућности у којима се то догађа, без обзира да ли је Q број или неки алгебарски израз долази се до логичке основе за раздвајања свих могућих случајева.

ПРИМЕР 12. *Одреди све целе бројеве x и y који задовољавају једнакост $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.*

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$ трансформише у облик $x^2 + 2x - 6 = xy + 3y = y(x + 3)$, онда постоје две могућности:

1) Ако је $x = -3$, онда је $x^2 + 2x - 6 = -3$, а $y(x + 3) = 0$, па $x = -3$ није решење једначине;

2) Ако је $x \neq -3$, онда је $y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x + 3} = x - 1 - \frac{3}{x + 3}$. Како y мора бити цео број постоје следеће

могућности:

2.1) Ако је $x + 3 = 1$, онда је $x = -2$, $y = -6$;

2.2) Ако је $x + 3 = -1$, онда је $x = -4$, $y = -2$;

2.3) Ако је $x + 3 = 3$, онда је $x = 0$, $y = -2$;

2.4) Ако је $x + 3 = -3$, онда је $x = -6$, $y = -6$.

ПРИМЕР 13. *Одреди све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је $p(x + y) = xy$, при чему је p неки прост број.*

РЕШЕЊЕ: Из $p(x + y) = xy$ добија се $px = xy - py = y(x - p)$. Сада су могућа два случаја:

1) Ако је $x = p$, онда је $p^2 = 0$, тј. $p = 0$, што није могуће;

2) Ако је $x \neq p$, онда је $y = \frac{px}{x - p} = \frac{px - p^2 + p^2}{x - p} = p + \frac{p^2}{x - p}$.

3) Да би број y био природан, p^2 мора бити дељиво са $x - p$, па се, с обзиром да је p прост број, разликују четири могућности:

3.1) Из $x - p = 1$, следи $x = p + 1$, $y = p^2 + p$;

3.2) Из $x - p = p$, следи $x = 2p$, $y = 2p$;

3.3) Из $x - p = p^2$, следи $x = p^2 + p$, $y = p + 1$.

3.4) Случајеви $x - p = -1$, $x - p = -p$ и $x - p = -p^2$ опадају, јер тада један од бројева x или y није природан.

Ова једначина је била веома присутна на математичким такмичењима, додуше у форми одредити природне бројеве x и y чији је производ $2, 3, 5, \dots, p$ пута већи од њиховог збира. Интересантно за истраживање је колико решења има дати проблем за ма који природан број n .

ПРИМЕР 14. *Одреди све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Из услова задатка се добија да је $10x + y = (x + y)^2$ или $9x + (x + y) = (x + y)^2$. Како је $x \neq 0$, то је и $(x + y) \neq 0$, па се деобом добијене једнакости са $(x + y)$

добија једнакост: $\frac{9x}{x + y} + 1 = x + y$.

Ако је највећи заједнички делилац за x и y једнак d , онда постоје узајамно прости бројеви a и b такви да је $1 \leq x = ad \leq 9$ и $0 \leq y = bd \leq 9$. Тада једначина постаје $\frac{9ad}{(a+b)d} + 1 = (a+b)d$ или $\frac{9a}{a+b} + 1 = .$

Како количник $\frac{9a}{a+b}$ мора бити природан број и како су a и $(a+b)$ узајамно прости, то су могућа

три случаја:

- 1) Ако је $a+b=1$, онда је $9a+1=d$. Овај случај је немогућ, јер из $a+b=1$ следи, због $x \neq 0$, да је $a=1, b=0$. У том случају је $d=10$, што није могуће, јер је $d \leq 9$.
- 2) Ако је $a+b=3$, онда је $3a+1=3d$. Ово није могуће, јер лева страна једнакости није дељива са 3, а десна јесте.
- 3) Ако је $a+b=9$, онда је $a+1=9d$ или $a=9d-1$. Како је $1 \leq x \leq 9$, то је $1 \leq x = ad = (9d-1)d \leq 9$, па је $d=1$. То значи да је $a=8$ и $b=1$.

Дакле, тражени број је $81 = (8+1)^2$.

ПРИМЕР 15. Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч?

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени троцифрени бројеви x и y и нека је број x дописан броју y са леве стране. Тада због услова задатка, тј. дописивања броја x до броја y , важи једнакост: $1000x + y = 3xy$. Како је $x \neq 0$, дељењем једнакости са x добија се једнакост $1000 + \frac{y}{x} = 3y$. Број y мора бити дељив бројем x , па је $y = kx$ ($k \in \mathbb{N}$). Добија се $1000 + k = 3kx$, или $k(3x - 1) = 1000$. Како је x троцифрен број, то је $x \geq 100$, па је $3x \geq 300$, а $3x - 1 \geq 299$. Како су делиоци броја 1000 већи од 299 само бројеви 1000 и 500, то постоје само две могућности:

- 1) $3x - 1 = 1000$, или $3x = 1001$, што није могуће, јер 1001 није дељиво са 3.
- 2) $3x - 1 = 500$, или $3x = 501$, а $x = 167$. Тада је $3y - 1000 = 2$, па је $y = 334$.

Тражено решење је: $3 \cdot 167 \cdot 334 = 167 \cdot 334$.

ЗАДАЦИ

1. Одреди све парове целих бројева x и y тако да је њихов производ једнак шестоструком збиру.
2. Одреди све целе бројеве који се могу приказати у облику $\frac{a^2 + 2}{a - 1}$ где је a цео број различит од 1.
3. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи једнакост $x(y+1)^2 = 243y$.
4. Решити једначину $xy + 7x - 3y = 23$, ако су x и y цели бројеви.
5. Одреди све парове целих бројева x и y тако да је $x^2y = y^3 + 10$.
6. Одреди све природне бројеве x и y који су решења једначине $y^4 + x = xy + 9$.
7. Постоји ли двоцифрен природан број који је једнак збиру квадрата својих цифара?
8. Одреди све двоцифрене бројеве који су дељиви производом својих цифара.

9. У дувачком оркестру музичари су били постројени у облику квадрата (n редова са по n музичара), а затим се престојили у правоугону формацију ($n + 5$ редова са m музичара). Колико је музичара било у оркестру?
10. Одреди све целе бројеве x за које је $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 10}{x + 2}$ природан број.
11. Да ли се скуп првих 100 природних бројева могу поделити у три дисјунктна подскупа тако да је збир бројева првог подскупа дељив са 102, збир бројева другог подскупа дељив са 203, а збир бројева трећег подскупа дељив са 304?
12. Кифла кошта пола динара, погачица 2 динара, а ђеврек 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 пецива?
13. Одреди сва целобројна решења једначине: $xy + 1 = x^3 + y$. Колико решења има?
14. Постоје ли три узастопна непарна природна броја чији је збир квадрата четвороцифрени број са међусобно једнаким цифрама?
15. Постоји ли прост број p који се може приказати у облику $\frac{n^3 + 5}{n^2 + 1}$, ако је n природан број.

КОРИШЋЕЊЕ ЗБИРА

Један од начина за разликовање случајева при решавању Диофантових једначина је и анализа збира. Најчешће та анализа почива на трансформацији дате једначине у облик који је погодан за уочавање и разликовање случајева. За то је подесан збир ненегативних сабирака, а посебно збир квадрата, збир корена или збир апсолутних вредности.

ПРИМЕР 16. У скупу целих бројева решити једначину $x^4 + y^{2020} = 2x^2 - 1$.

РЕШЕЊЕ: Како је дата једначина $x^4 + y^{2020} = 2x^2 - 1$ еквивалентна са једначином $(x^2 - 1)^2 + (y^{1010})^2 = 0$ и како је збир квадрата два цела броја једнак 0 ако и само ако су оба броја једнака 0, то је могућ само један случај: $x^2 - 1 = 0$ и $y = 0$. Дакле, решења су: $(x, y) \in \{ (1, 0), (-1, 0) \}$.

ПРИМЕР 17. Одреди све целе бројеве x и y тако да задовољавају једначину: $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$.

РЕШЕЊЕ: Трансформацијом дате једначине $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$ добија се њој еквивалентна једначина $(x^2 - 3)^2 + (y^2 - 7)^2 = 5$. Како је збир два квадрата целих бројева једнак 5 само ако је један од њих 1, а други 4, постоје следеће могућности:

1) $(x^2 - 3)^2 = 1$ и $(y^2 - 7)^2 = 4$. Дакле, $|x^2 - 3| = 1$ и $|y^2 - 7| = 2$. Како једначине $x^2 = 2$ и $y^2 = 5$ немају решења у скупу целих бројева то је $x^2 = 4$ и $y^2 = 9$, а тражена решења су уређени парови бројева $(x, y) \in \{(2, 3), (2, -3), (-2, 3), (-2, -3)\}$.

2) $(x^2 - 3)^2 = 4$ и $(y^2 - 7)^2 = 1$. Следи $|x^2 - 3| = 2$ или $|y^2 - 7| = 1$. Како једначине $x^2 = 5$, $x^2 = -1$, $y^2 = 8$ и $y^2 = 6$ немају решења у скупу целих бројева то једначина у овом случају нема целобројних решења. Δ

У оба претходна примера разликовање случајева је обављено транс-формацијама једне стране дате једначине у збир квадрата. Те трансформације су биле скоро очигледне. У наредним примерима трансформације у збир нису видљиве на први поглед, већ се једначина мора прилагодити за трансформацију у збир квадрата.

ПРИМЕР 18. Постоје ли цели бројеви x и y који задовољавају једнакост $x^2 + xy + y^2 = 1$.

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина помножи са 2 добија се еквивалентна једначина $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ или $x^2 + (x + y)^2 + y^2 = 2$. Збир квадрата три цела броја је једнак 2, ако су два од тих бројева по 1, а трећи 0, па се разликују три могућности:

- 1) $x^2 = 1, (x + y)^2 = 1$ и $y^2 = 0$. Следи да је $y = 0$, а $x^2 = 1$, па су решења $(1, 0)$ или $(-1, 0)$.
- 2) $x^2 = 1, (x + y)^2 = 0$ и $y^2 = 1$. Како је $x + y = 0$, а $|x| = 1$ и $|y| = 1$, то су решења $(1, -1)$ или $(-1, 1)$.
- 3) $x^2 = 0, (x + y)^2 = 1$ и $y^2 = 1$. Следи да је $x = 0$, а $y^2 = 1$, па су решења $(0, 1)$ или $(0, -1)$.

Сва решења дате једначине су: $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0), (1, -1), (-1, 1), (0, 1), (0, -1)\}$.

Трансформација у збир је плодотворна и код текстуалних проблема који се свODE на Диофантове једначине. Наредни пример то најбоље илуструје.

ПРИМЕР 19. Одреди све троцифрене бројеве који при дељењу са 11 дају остатак једнак збиру квадрата својих цифара.

РЕШЕЊЕ 1: Нека је тражени троцифрени број $\overline{abc}$. Тада важи једнакост $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(9a + b) + a - b + c$, па је остатак при дељењу траженог броја са 11 једнак $a - b + c$ (ако је $a - b + c < 11$) или $a - b + c - 11$ (ако је $a - b + c > 11$).

Према условима задатка је $a - b + c = a^2 + b^2 + c^2$ и $a^2 + b^2 + c^2 - a + b - c = 0$. Множењем добијене једнакости са 2 добија се $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2b - 2c = 0$ или $a^2 + b^2 + c^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 3$.

Јасно је да једначина има решења ако су три од датих сабирака једнаки 0, а преостала три једнака 1. Како је $\overline{abc}$ троцифрен број, то је $a \geq 1$, па је $a = 1$.

Слично је $b \geq 0$, па је $b + 1 \geq 1$ и због тога је $b = 0$, односно $b + 1 = 1$. На основу тога је $a^2 + b^2 + c^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 1 + 0 + c^2 + 0 + 1 + (c - 1)^2 = 3$, па се разликују два случаја:

- 1) $c = 0$ или $(c - 1)^2 = 1$.
- 2) $c = 1$ или $(c - 1)^2 = 0$.

Тражени бројеви су очигледно 100 и 101.

Аналогно се доказује да случај $a - b + c - 11$ нема решења.

РЕШЕЊЕ 2: Остатак при дељењу броја $\overline{abc}$ са 11 је $a^2 + b^2 + c^2$. Према томе је $0 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 10$, што значи да је свака од цифара a, b и c мања или једнака 3, а збир квадрата све три цифре је мањи или једнак 10. Дакле у обзир долазе само бројеви: 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 130, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 300, 301 и 310. Појединачном провером остатка при дељењу сваког од тих бројева са 11 и збира квадрата цифара се утврђује да услове задатка испуњавају само бројеви 100 и 101.

ЗАДАЦИ

1. Одреди све парове целих бројева x и y за које је:
 - a) $x^2 + y^2 = 0$;
 - b) $x^2 + y^2 = 1$;
 - c) $x^2 + y^2 = 2$;
 - d) $x^2 + y^2 = 3$;
 - e) $x^2 + y^2 = 4$;
 - f) $x^2 + y^2 = 10$.
2. Постоје ли цели бројеви x и y за које важи једнакост $x^2 + y^4 = 2x - 1$?
3. Одреди целе бројеви x и y тако да је $4x^2 + y^2 = 12x + 4y - 12$.
4. Решити једначину $x^4 + y^2 + 2y = 1$, ако су x и y цели бројеви.

5. Постоје ли цели бројеви x, y, z такви да је $x^2 + 4y^2 + z^4 = 2x - 20y - 23$?
6. Да ли једначина $p^2 + q^2 = r$ има решење, ако су p, q и r прости бројеви? Да ли исто важи и за једначину $p^2 + q^2 = r^2$?
7. Одреди сва решења једначине $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, ако су x, y и z цели бројеви.
8. Докажи да једначина $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ нема решења у скупу целих бројева.
9. Дата је једначина $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = n$. Одреди најмању вредност природног броја n за коју дата једначина има решења у скупу: а) целих бројева; б) природних бројева.
10. Постоје ли пет узастопних природних бројева чији је збир квадрата једнак збиру првих n природних бројева?
11. У скупу целих бројева решити једначину $2m^2 + n^2 = 2mn + 3n$.
12. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи једнакост $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.
13. Постоје ли различити цели бројеви x, y и z такви да важи једнакост: $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 2y - 2z = 3333$?
14. Дата је једнакост $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2020}^2 = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{2020}) - 2019$. Одреди природне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$.
15. Да ли систем једначина $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = x_1 x_2 \dots x_k = 2020$ има решења у скупу природних бројева?
16. Одреди све целе бројеве x и y за које је $x^2 - xy + y^2 = x + y$.
17. У скупу природних бројева решити систем једначина: $x + y = zt$ и $z + t = xy$.
18. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $7x^2 + y^2 = 2^{2019}$? Какав је одговор, ако је $7x^2 + y^2 = 2^{2020}$?
19. Докажи да се број 2^n може приказати као збир $7x^2 + y^2$, где су x и y неки природни бројеви, а n природан број $n (n > 2)$.
20. Одреди све природне бројеве облика $222\dots222$ који се могу приказати као збир квадрата или разлика квадрата два природна броја.
21. Одреди све целе бројеве x, y, z и t такве да важи једнакост $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$.
22. Одреди све целе бројеве a, b и c који задовољавају неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$.
23. Ако су x, y и z цели бројеви, Одреди бар једно решење једначине $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 6$.

КОРИШЋЕЊЕ (НЕ)ПАРНОСТИ

Приметно је да се решавање Диофантових једначина не своди на само једну идеју, јер се поред основне замисли увек користи још нешто, тј. свака идеја се комбинује са неком другом, а најчешће се као помоћни инструмент користи дељивост, као основна релација теорије бројева. Проблеми који следе експлицитно користе идеје парности (дељивости бројем 2), односно непарности.

Коришћење парности је један од познатих и често примењиваних начина за решавање Диофантових једначина, не само зато што је разликовање парних и непарних целих бројева природно, него и зато што постоји велики број алгоритама за утврђивање (не)парности. Осим тога уочавање (не)парности најчешће елиминише многа потенцијална решења.

ПРИМЕР 20. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 4y = 555\dots555$, при чему запис $555\dots555$ садржи тачно n петица.

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $n = 1$, онда је $x^2 + 4y = 5$, тј. $x = 1, y = 1$.

2) Ако је $n \geq 2$, онда x може бити паран или непаран број :

2.1) Ако је $x = 2\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}$), онда је $x^2 + 4y = 4\kappa^2 + 4y = 4(\kappa^2 + y) = 555...555$, па једначина нема решења.

2.2) Ако је $x = 2\kappa + 1$ ($\kappa \in \mathbb{N}$), онда је $x^2 + 4y = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 + 4y = 555...555$, или $4\kappa^2 + 4\kappa + 4y = 4(\kappa^2 + \kappa + y) = 555...554$. Дакле, $2(\kappa^2 + \kappa + y) = 277...77$. Како је лева страна једначине паран, а десна непаран број, то једначина нема решења.

Према томе једино решење проблема је $(x, y) = (1, 1)$.

ПРИМЕР 21. Одреди све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.³

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Према условима задатка је $\overline{ab} = 10a + b = (a + b)^2$. Како је $10a + b = a + b + 9a = (a + b)^2$, то је $9a = (a + b)^2 - (a + b) = (a + b)(a + b - 1)$.

Како су $(a + b)$ и $(a + b - 1)$ узастопни природни бројеви то је њихов производ паран, па је $9a$ такође паран, што значи да је и a паран број. Зато се разликују следеће могућности:

1) $\overline{ab} = 25$, што није решење, јер је $25 \neq (2 + 5)^2 = 49$;

2) $\overline{ab} = 49$, није решење јер $49 \neq (4 + 9)^2 = 169$;

3) $\overline{ab} = 64$, такође није решење, јер је $64 \neq (6 + 4)^2 = 100$;

4) $\overline{ab} = 81$, што јесте решење, јер је $81 = (8 + 1)^2 = 9^2$.

ПРИМЕР 22. Докажи да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2023$ нема решења у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Збир бројева x^2, y^2, z^2 је 2007, дакле, непаран, па су или сва три броја непарна или су два парна, а трећи непаран и разликују се следећи случајеви:

1) Нека је $x = 2m + 1, y = 2n + 1$ и $z = 2\kappa + 1$ ($m, n, \kappa \in \mathbb{Z}$). Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2\kappa + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2007$. Следи да је $4m(m + 1) + 4n(n + 1) + 4\kappa(\kappa + 1) = 2020$. Дељењем једнакости са 4 добија се $m(m + 1) + n(n + 1) + \kappa(\kappa + 1) = 505$. Како су бројеви $m(m + 1), n(n + 1)$ и $\kappa(\kappa + 1)$ парни, то је и њихов збир паран, па једначина нема решења, јер је 505 непаран број.

2) Нека је $x = 2m, y = 2n$ и $z = 2\kappa + 1$. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + (2\kappa + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2023$. Из добијене једнакости следи да је $4m^2 + 4n^2 + 4\kappa(\kappa + 1) = 2022$. Дељењем последње једнакости са 2 добија се да је $2m^2 + 2n^2 + 2\kappa(\kappa + 1) = 1011$. С леве стране једнакости је паран, а са десне непаран број, па једначина ни у овом случају нема решења.

ПРИМЕР 23. Решити једначину $x^2 + y^2 = 2^{2019}$ у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Како је 2^{2019} паран број, бројеви x^2 и y^2 су исте парности, па постоје две могућности:

1) Бројеви x и y су непарни, тј. $x = 2m + 1$ и $y = 2n + 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Следе једнакости $x^2 + y^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 2^{2019}$. Дакле, $4m(m + 1) + 4n(n + 1) = 2^{2019} - 2 = 2(2^{2018} - 1)$, односно $2m(m + 1) + 2n(n + 1) = 2^{2018} - 1$. Како је лева страна једнакости паран број, а десна непаран број, у овом случају једначина нема целобројних решења.

2) Бројеви x и y су парни, тј. $x = 2^m a$ и $y = 2^n b$, где су a и b непарни природни бројеви, а m и n су природни бројеви.

³ Овај задатак је већ виђен, али није случајно поновљен, јер је намера да се покаже како један проблем може бити решен коришћењем више идеја.

Тада је $x^2 + y^2 = (2^m a)^2 + (2^n b)^2 = 2^{2m} a^2 + 2^{2n} b^2 = 2^{2019}$, па се, због симетри-чности, уз претпоставку $m \geq n$, не умањујући општост, разликују две могућности:

2.1) Ако је $m > n \geq 1$, онда је $2^{2m} a^2 + 2^{2n} b^2 = 2^{2n} (2^{2m-2n} a^2 + b^2) = 2^{2019}$. Следи да је $2^{2m-2n} a^2 + b^2 = 2^{2019-2n}$. Како је $(2^{2m-2n} a^2 + b^2)$ непаран број, а $2^{2019-2n}$ паран број, то једначина нема решења.

2.2) Ако је $m = n$, онда је $2^{2m} a^2 + 2^{2n} b^2 = 2^{2n} (a^2 + b^2) = 2^{2019}$, тј. $a^2 + b^2 = 2^{2019-2n}$. Како је $2^{1999-2n}$ паран број и непаран степен броја 2, то су евидентна два случаја:

2.2.1) Ако је $n \leq 1008$ онда је $2^{2019-2n}$ дељиво са 4. Како су бројеви a и b непарни, то $a^2 + b^2$ при дељењу са 4 даје остатак 2, па једначина нема решења.

2.2.2) Ако је $n = 1008$, онда је $a^2 + b^2 = 2^{2019-2016} = 8$, па је $a = b = 2$, а $x = y = 2^{1009}$.

Дакле, једина решења дате једначине су $x = y = 2^{1009}$.

ЗАДАЦИ

- Докажи да једначина $x^2 + y^2 = 2019$ нема решења у скупу природних бројева.
- Одреди све целе бројеве x и y такве да је $3x^2 + 4y^2 = 2020$.
- Постоје ли природан број k и прост број p такви да је $2^k + p = 1026$?
- Решити једначину $x! + 2y = 123\,456\,789$ у скупу природних бројева.
- Одреди природан број x и прост број p тако да је $x! + 2 = p^2$.
- Докажи да једначина $x^2 + y^2 = \overline{999\dots 999}$ (број деветки је већи од 1) нема целобројних решења.
- Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 4y^2 = 1000$?
- Докажи да једначина $x^2 - 4y^2 + 8z^3 = 3$ нема решења у скупу целих бројева.
- Докажи да не постоје цели бројеви x и y за које је $2x^2 - 5y^2 = 7$.
- Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $19x^2 + 2 = y^2$?
- Одреди природне бројеве x и y тако да је $2^x - 1 = y^2$.
- Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $2^x + 1 = y^2$?
- Одреди све троцифрене природне бројеве који при дељењу са 11 дају број једнак збиру квадрата цифара полазног броја.
- Решити једначину $x^2 + y^2 + z^2 = 4444$ у скупу целих бројева.
- Да ли се број 2020 може представити у облику збира квадрата неколико различитих природних бројева.
- Да ли постоји пет различитих природних бројева таквих да зборови формиран од по два од њих чине десет узастопних природних бројева?
- Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^4 - y = x^2 + y^2 + 54321$.
- Дата је једначина $2p + 3q = 5r$, где су p , q и r прости бројеви. Колико решења има ако међу бројевима: а) може; б) не може бити једнаких.
- Да ли за сваки природан број k већи од 1 постоје прости бројеви p и q такви да је $p + q = 3^k$?



КОРИШЋЕЊЕ ДЕЉИВОСТИ

Већ је речено, да је једна од основних идеја за решавање Диофа-нтових једначина почива на једноставној чињеници да ако је $A = B$, онда су и својства израза A и B у погледу дељивости идентична. На пример, ако је A израз који је дељив са 3, а при дељењу са 4 даје остатак 1, онда те особине мора имати и израз B . Идеја је да се дата једначина $A = B$ трансформише у еквивалентну једначину $A_k = B_k$ тако да се за један од израза A_k или B_k може јасно и тачно одредити дељивост.

ПРИМЕР 24. Одреди све просте бројеве p и q тако да важи једнакост $p + q = q^2 - 40$.

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина $p + q = q^2 - 40$ трансформише, добија се да је $p + 40 = q^2 - q = q(q - 1)$. Како десна страна једначине представља производ два узастопна природна броја, то је она увек дељива са 2, па такав мора бити и број $p + 40$. То важи само за $p = 2$ (јер је 2 једини паран прост број), па је тада $q(q - 1) = p + 40 = 2 + 40 = 42$, а $q = 7$.

На сличан начин се решавају ситуације када се ради о дељивости са другим бројевима.

ПРИМЕР 25. Одреди све двоцифрене природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Тада је $10a + b = 9(a + b)$. То значи да је тражени број $\overline{ab}$ дељив са 9, па је и збир његових цифара дељив са 9. Јасно је да је тада $a + b$ једнако 9 или 18, па је $10a + b$ једнако $9 \cdot 9 = 81$ или $9 \cdot 18 = 162$. Како је 162 троцифрен број, једино решење је $81 = 9(8 + 1)$.

Веома интересантни су примери који у себи садрже дељивост која није дата директно, него посредно и индиректно.

ПРИМЕР 26. Одреди све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру квадрата цифре десетица и куба цифре јединица.

РЕШЕЊЕ: Ако је тражени двоцифрени број $\overline{xy}$, онда је $10x + y = x^2 + y^3$. Еквивалентном трансформацијом се добија да је $10x - x^2 = x(10 - x) = y^3 - y = (y - 1)y(y + 1)$.

Десна страна једначине представља производ три узастопна природна броја, па је увек дељива са 6, што значи да то мора бити и лева. Како су бројеви x и $(10 - x)$ исте парности и $x(10 - x)$ је дељив са 6, то је $x = 6$ или $10 - x = 6$, односно $x = 4$.

Ако је $x = 6$, онда је $24 = (y - 1)y(y + 1)$, па је $y = 3$, а тражени број $63 = 6^2 + 3^3$.

Ако је $x = 4$, онда је $24 = (y - 1)y(y + 1)$, па је $y = 3$, а тражени број $43 = 4^2 + 3^3$.

У претходним примерима коришћена је дељивост без остатка, што не мора бити увек пракса. Некада се до решења долази управо анализом остатка који приликом дељења неким бројем даје једна, односно друга страна једнакости. Такав је био случај и са коришћењем последње цифре која представља остатак при дељењу са 10.

ПРИМЕР 27. Одреди све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је $x! + 5y = 6666$.

РЕШЕЊЕ: Број 6666 при дељењу са 5 даје остатак 1 и број $x! + 5y$ при дељењу са 5 мора давати остатак 1. Како је $5y$ увек дељиво са 5, остаје да се види када је остатак при дељењу $x!$ са 5 једнак 1.

Пошто је за $x \geq 5$ број $x!$ увек дељив са 5, то у обзир долазе вредности x мање од 5, дакле 1, 2, 3, 4. Како само $1! = 1$ и $3! = 6$ при дељењу са 5 дају остатак 1, то су тражена решења $5y = 6665$ или $5y = 6660$. Значи да су сва решења уређени парови: $(x, y) \in \{(1, 1333), (3, 1332)\}$.

ПРИМЕР 28. Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О ком броју је реч? Колико има решења?⁴

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Тада је очигледно $10x + y + 10y + x = 11(x + y) = \kappa^2$ или $x + y = \kappa^2 / 11 \leq 18$. Како је $x + y$ природан број између 1 и 18, то је број κ^2 дељив са 11 и уз то $\kappa^2 < 11 \cdot 18 = 198$. Значи да је $\kappa^2 = 121$, па је $\kappa = 11$. Тада је $x + y = 11$, па су сва решења проблема бројеви: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

ПРИМЕР 29. Одреди све троцифрене бројеве који су 11 пута већи од збира својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени троцифрени број $\overline{xyz}$. Из услова задатка следи да је $100x + 10y + z = 11(x + y + z)$. Како је десна страна једнакости дељива са 11, таква мора бити и лева па је тражени број $100x + 10y + z = 11(x + y) + (x - y + z)$ дељив са 11. То значи да је $|x - y + z|$ дељиво са 11. Како је $1 \leq x \leq 9$ и $0 \leq y \leq 9$, то је $|x - y + z| = 0$ или $|x - y + z| = 11$:

1) Ако је $|x - y + z| = 0$, онда је $y = x + z$. Када се ова релација унесе у полазну једнакост, добија се $100x + 10x + 10z + z = 11(2x + 2z)$. После дељења са 11 добије се да је $10x + z = 2x + 2z$, односно $8x = z$, па је $x = 1, z = 8, y = 9$. Тражени број је 198.

2) Ако је $|x - y + z| = 11$, онда је $x - y + z = 11$ (јер је $y \leq 9$). Тада је $x + z = 11 + y$. Како је $\overline{xyz} \leq 11 \cdot (9 + 9 + 9) = 11 \cdot 27 = 297$, то је $x \leq 2$. Како је $0 \leq z \leq 9$, то је $x + z \leq 11$ и једина могућност која долази у обзир јесте $x = 2, z = 9$ и $y = 0$. Међутим, број 209 који се на тај начин добије не испуњава услове, јер је $209 \neq 121 = 11 \cdot 11$.

ЗАДАЦИ

1. У скупу целих бројева решити једначину $3x^2 + 5y^2 = 345$.
2. Одреди све природне бројеве x и све просте бројеве p , тако да је $x! + 3 = p^2$.
3. Решити једначину $x! + 48y = 1008$, ако су x и y природни бројеви.
4. Одреди све уређене парове (x, y) природних бројева x и y такве да је $x! + y^2 = 987\,654$.
5. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $6x - y! = 10$?
6. Докажи да не постоји троцифрен природан број $\overline{abc}$ такав да је број $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ потпун квадрат.
7. Може ли збир квадрата пет узастопних целих бројева бити потпун квадрат?
8. Да ли постоје природни бројеви x, y и κ такви да важи једнакост $x^2 + y^2 = 10^\kappa - 1$?
9. Одреди све природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.
10. Дешифровати ребус: $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$.
11. Не вршећи множење $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 399*6***$ у добијеном броју написати одговарајуће цифре.
12. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен, такође са једнаким цифрама. Одреди све такве бројеве x и y .
13. Докажи да једначина $x^3 + 4 = 4y(y + 1)$ нема решења у скупу целих бројева.

⁴ Да ли има решења ако је број троцифрен?

14. Одреди све четвороцифрене бројеве који су потпуни квадрати и чија је прва цифра једнака другој, а трећа цифра једнака четвртој.
15. Одреди троцифрен број m који је квадрат природног броја n , ако је збир цифара троцифреног броја m једнак $n - 1$.

КОРИШЋЕЊЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Често се као један од начина за раздвајање случајева употребљавају и неједнакости. Неједнакости се користе, како је већ у неким примерима приказано, да се из области дефинисаности једначине издвоје скупови у којима једначина нема решења. Потом се једначина, неким од већ изложених поступака, решава у преосталом делу области дефинисаности. Најбоље је при том, уколико је могуће, елиминисати делове области дефинисаности које имају бесконачно много бројева, а једначину потом решавати у коначном скупу.

ПРИМЕР 30. *Постоји ли четвороцифрен природан број који је једнак четвртој степену збира својих цифара?*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{abcd}$. Тада према датим условима следи $\overline{abcd} = (a + b + c + d)^4$. Како је $5^4 < 1000 \leq \overline{abcd} < 10^4$, закључује се да је $5 < a + b + c + d < 10$. Дакле, $a + b + c + d$ је 6, 7, 8 или 9. Како је $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ и $9^4 = 6561$, јасно је да услове задатка испуњава само број $2401 = 7^4$, јер је у свим осталим случајевима збир цифара већи од 9.

ПРИМЕР 31. *Одреди све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Према условима задатка следи да је $\overline{ab} = 10a + b = a^3 + b^2$. Како је $\overline{ab} = 10a + b \leq 99$ то је и $a^3 + b^2 \leq 99$, па је $1 \leq a \leq 4$. Трансформацијом дате једначине добија се $10a - a^3 = b^2 - b$ или $a(10 - a^2) = b(b - 1)$. С обзиром да је $b(b - 1)$, као производ два узастопна природна броја, паран број, то је и $a(10 - a^2)$ паран број. То значи да је и a паран број.

Како је $b(b - 1) \geq 0$ то је и $a(10 - a^2) \geq 0$, тј. $10 - a^2 \geq 0$, што даје $a \leq 3$. Једини паран број мањи или једнак са 3 је $a = 2$. Тада је $a(10 - a^2) = b(b - 1) = 12$, што значи да је $b = 4$. Дакле, тражени број је 24 ($24 = 2^3 + 4^2$).

У претходним примерима са две неједнакости, број случајева је значајно смањен, чиме је метод показао своју ефикасност. У наредном примеру приказаће се како се бесконачни скуп могућих решења, коришћењем неједнакости може свести на мали број могућих случајева.

ПРИМЕР 32. *Одреди све природне бројеве чија је вредност једнака збиру квадрата његових цифара.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

- 1) Ако је тражени број x једноцифрен, онда је $x = x^2$, па је $x = 1$.
- 2) Уколико је тражени број двоцифрен онда је $10x + y = x^2 + y^2$, што је еквивалентно са $x(10 - x) = y(y - 1)$. Како је $y(y - 1)$ паран број, то је и x парна цифра. За $x \in \{2, 4, 6, 8\}$ број $x(10 - x)$ је једнак или 16 или 24, а они очигледно не представљају производ два узастопна природна броја.
- 3) Ако је тражени број троцифрен, онда је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2$. Како је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \cdot 81 = 243$, то је $x = 1$ или $x = 2$.
- 3.1) Ако је $x = 1$, онда је $100 + 10y + z = 1 + y^2 + z^2$ или после сређивања $99 + 10y + z = y^2 + z^2$. Како је $99 > z^2$ и $10y > y^2$, то је лева страна увек већа од десне па једначина нема решења.

3.2) Ако је $x = 2$, онда је $200 + 10y + z = 4 + y^2 + z^2$. Лева страна једнакости је увек већа од 200, а десна увек мања од 200, па једначина нема решења.

4) Уколико је број цифара већи од 3 и једнак k , онда је тражени број увек већи од 10^{k-1} , а збир квадрата његових цифара мањи од $100k$, па је једнакост могућа само ако је $10^{k-1} \leq 100k$, или $10^{k-3} \leq k$, што је немогуће, јер добијена неједнакост не важи ни за једно k веће од 3. Једино решење је број 1.

ПРИМЕР 33. Постоје ли природни бројеви a, b, c, d такви да је $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$?

РЕШЕЊЕ: Не умањујући општост расуђивања, због симетричности једначине, може се претпоставити да је $1 < a \leq b \leq c \leq d$. Тада је $\frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{a^2}$, па је

$\frac{4}{d^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1 \leq \frac{4}{a^2}$. Следи да је $a^2 \leq 4$, односно $a = 1$ или $a = 2$. Ако је $a = 1$, онда је $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq \frac{1}{a^2} = 1$ што значи да једначина нема решења.

Ако је $a = 2$, онда је $\frac{3}{d^2} \leq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{b^2}$. Следи да је $b^2 \leq 4$, па је $b = 2$. Остаје

$\frac{2}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{2}{4} \leq \frac{2}{c^2}$, па је $c^2 \leq 4$, тј. $c = 2$. Јасно је да је тада и $d = 2$, па је једино решење једначине $a = b = c = d = 2$.

ПРИМЕР 34. Одреди природне бројеве x, y и z тако да важи једнакост $x! + y! = z!$.

РЕШЕЊЕ: Како је $x! + y! = z!$ и како је $x! \geq 1$ и $y! \geq 1$, то је $x < z$ и $y < z$ и $z \geq 2$. Тада је $x! + y! = z! = z(z-1)\dots(y+1)y(y-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = z(z-1)\dots(y+1) \cdot y!$.

Значи да је $x! = z(z-1)\dots(y+1) \cdot y! - y! = y! (z(z-1)\dots(y+1) - 1)$.

Због симетричности једначине по x и y , не умањујући општост, може се претпоставити да је $x \leq y$ и тада су два могућа случаја:

1) Ако је $x < y$, онда је и $x! < y!$, па једначина нема решења јер би било $x! = y! (z(z-1)\dots(y+1) - 1) < y!$, тј. $z(z-1)\dots(y+1) - 1 < 1$, што је немогуће због $z \geq 2$.

2) Ако је $x = y$, онда је $z(z-1)\dots(y+1) - 1 = 1$, па је $z(z-1)\dots(y+1) = 2$ што значи да је $z = 2$. Тада је $x = y = 1$.

Према томе једино решење је $x = y = 1$ и $z = 2$. Δ

ПРИМЕР 35. Једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ решити у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: С обзиром на симетричност дате једначине разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $x = 0$, онда је $y = 0$.

2) Ако је $x = -1$, онда је $1 - y + y^2 = y^2$, па је $y = 1$.

3) Ако је $x = 1$, онда је $1 + y + y^2 = y^2$, па је $y = -1$.

4) Ако је $|x| \geq 2$ и $|y| \geq 2$, онда је дата једначина еквивалентна са $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$. Како је тада

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} \leq \frac{3}{4} < 1$ једначина нема решења.

Према томе сва решења једначине су $(x, y) \in \{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$.

ПРИМЕР 36. Одреди све уређене тројке (x, y, z) природних бројева x, y и z , таквих да је $xy + yz + zx - xyz = 2$.

РЕШЕЊЕ: Једначина је симетрична по све три променљиве и разматрање се, не умањујући општост, може извести по једној променљивој, на пример x . Постоје следеће могућности:

1) Ако је $x = 1$, онда једначина постаје $y + yz + z - yz = y + z = 2$, па је $(1, 1, 1)$ једно решење једначине.

2) Ако је $x = 2$, онда је $2y + yz + 2z - 2yz = 2y - yz + 2z = 2$. Следи да је $yz - 2y - 2z + 4 = (y - 2)(z - 2) = 2$, а то значи да постоје два решења: $y - 2 = 1, z - 2 = 2$ или $y - 2 = 2, z - 2 = 1$.

3) Како би исти резултат добили и за $y = 1$ или $y = 2$, односно $z = 1$ или $z = 2$, преостаје случај $x > 2$, $y > 2$ и $z > 2$. Тада важе неједнакости:

$xyz \geq 3xy, xyz \geq 3yz$ и $xyz \geq 3zx$. Сабирањем ових неједнакости добија се да је

$3xyz \geq 3xy + 3yz + 3zx$, па је $xyz \geq xy + yz + zx$ или $2 = xy + yz + zx - xyz \leq 0$, што је немогуће.

Дакле, сва решења дате једначине су: $(x, y, z) \in \{ (1, 1, 1), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2) \}$.

ПРИМЕР 37. Постоје ли цели бројеви x и y такви да испуњавају једнакост $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

РЕШЕЊЕ: Пре него што се крене у процене леве, односно десне стране једначине, неопходно је трансформисати једначину у облик погодан за ефикасну анализу. Множењем једначине са 4 и додавањем броја 1 и на леву и на десну страну једначине добија се једнакост $4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$. Следи да је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + 4y^3 + y^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1)$.

Слично је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + y^2 + 4 + 4y^3 + 8y^2 + 4y - 5y^2 - 3 = (2y^2 + y + 2)^2 - 5y^2 - 3$. Дакле, $(2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1) = (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 2)^2 - (5y^2 + 3)$.

Сада се разликују две могућности:

1) Ако је $y = -1$, онда је $x^2 + x = 0$, па је $x = 0$ или $x = -1$.

2) Ако је $y \neq -1$, онда је $(y + 1)(3y + 1) > 0$. Будући да је $5y^2 + 3 > 0$ за све $y \in \mathbb{Z}$, то је $(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 2)^2$. Како између бројева $(2y^2 + y)^2$ и $(2y^2 + y + 2)^2$ постоји само један потпун квадрат и то је $(2y^2 + y + 1)^2$, следи да је $(2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2$.

3) Како је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 = 4y^4 + y^2 + 1 + 4y^3 + 4y^2 + 2y + 1$, то је $y^2 - 2y = 0$, тј. y узима вредности 0 или 2:

2.1) Ако је $y = 0$, онда је $x^2 + x = 0$, па је $x = 0$ или $x = -1$.

2.2) Ако је $y = 2$, онда је $x^2 + x = 30$, па је $x = 5$ или $x = -6$.

Према томе сва решења једначине су: $(x, y) \in \{(0, -1), (-1, -1), (0, 0), (-1, 0), (5, 2), (-6, 2)\}$.

ЗАДАЦИ

1. Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О којим бројевима је реч?
2. Постоји ли двоцифрен природан број чији је квадрат једнак кубу збира његових цифара?
3. Одреди све двоцифрене бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.
4. Одреди све цифре a, b и c и природан број n , тако да важи једнакост $a + \overline{bb} + \overline{ccc} = n^4$.

5. Постоји ли четвороцифрени природан број који је једнак кубу збира својих цифара?
6. Одреди два природна броја чији је збир једнак њиховом производу.
7. Постоје ли природни бројеви x и y чији је производ пет пута већи од њиховог збира? Колико таквих парова (x, y) има?
8. Да ли постоје три природна броја чији је производ једнак њиховом збиру?
9. Да ли постоје природни бројеви x , y и z , такви да је њихов производ три пута већи од њиховог збира?
10. Постоји ли троцифрен природан број који је једнак збиру четвртог степена цифре стотина, куба цифре десетица и квадрата цифре јединица?
11. Постоји ли троцифрен број који је једнак збиру своје цифре јединица, квадрата цифре десетица и куба цифре стотина?
12. Ако су p , q и r прости бројеви, онда једначина $p^4 + q^4 = r^4$ нема решења. Докажи.
13. Одреди све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је $y - x^4 = y^4 - 16x^2$.
14. Дешифровати квадрирање $(5c + 1)^2 = \overline{abcd}$ ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.
15. Докажи да број $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ није квадрат природног броја ни за један природан број n .
16. Решити једначину $x^4 + 2x^3 + x^2 - 11x + 11 = y^2$, ако су x и y ненегативни цели бројеви.
17. Одреди природан број n и прост број p , такве да је збир дилаца броја p^4 једнак n^2 .
18. Дата је једначина: $1 \cdot 1! + \dots + x \cdot x! = y^4$. Колико решења у скупу природних бројева има дата једначина?
19. Одреди све парове (x, y) природних бројева x и y тако да важи: $10^x + 11y = x + 2000$.
20. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ природни бројеви који задовољавају једнакост $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 117$. Одреди $x_1, x_2, \dots, x_{100}$.
21. Да ли једначина $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} = 1$ има решења у скупу природних бројева.
22. Постоје ли цели бројеви m и n такви да су бројеви $m^2 + n$ и $n^2 + m$ потпуни квадрати?
23. Одреди све природне бројеве x и y за које важи једнакост $x^3 - y^3 = xy + 25$.