



ДИОФАНТ

ЕЛЕКТРОНСКИ ЧАСОПИС ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ



ГОДИНА I – БРОЈ 2
ВАЉЕВО – ОКТОБАР 2021.

ДИОФАНТ

Електронски часопис за
додатну наставу математике

Година 1.

Број 2

Ваљево, октобар 2021.

Уредник часописа:

др Војислав Андрић (voja.andric@gmail.com)

Издавач:

Математички клуб „Диофант“

Ваљево, Поп Лукина 38

Телефон 065 291 22 00

Е – mail: diofant2020@gmail.com

Све прилоге, предлоге и примедбе слати путем електронских адреса:
diofant2020@gmail.com и voja.andric@gmail.com

Часопис је бесплатан

Излази повремено и по потреби

САДРЖАЈ

• Оријентациони наставни план и програм ШЗММ „Диофант“ за школску 2021/22. годину	4
• Тема 302 – Природни бројеви	10
• Тема 402 – Природни бројеви	12
• Тема 502 – Прости бројеви	14
• Тема 602 – Цели бројеви	16
• Тема 702 – Квадрат рационалног броја	18
• Тема 802 – Сличност троуглова	22





ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ОРИЈЕНТАЦИОНИ НАСТАВНИ ПЛАН И ПРОГРАМ

3. РАЗРЕД

- T 301 – Занимљиви изрази (септембар 4)
- T 302 – Природни бројеви (октобар 1)
- T 303 – Низови природних бројева (октобар 2)
- T 304 – Сабирање и одузимање бројева прве стотине (октобар 3)
- T 305 – Римски бројеви (октобар 4)
- T 306 – Логичко комбинаторни задаци (октобар 5)
- T 307 – Множење и дељење бројева прве стотине (новембар 1)
- T 308 – Решавање проблемских задатака методом израчунавања (новембар 2)
- T 309 – Припремни задаци за школско такмичење (1) (новембар 3)
- T 310 – Припремни задаци за школско такмичење (2) (новембар 4)
- T 311 – Пробно школско такмичење (новембар 5)
- T 312 – Магични квадрати (децембар 1)
- T 313 – Проблеми мерења и пресипања (децембар 2)
- T 314 – Множење и дељење природних бројева (децембар 3)
- T 315 – Одабрани задаци из математичког листа (децембар 4)
- T 316 – Пребројавање скупова бројева (јануар 3)
- T 317 – Пребројавање геометријских фигура (јануар 4)
- T 318 – Дешифровање рачунских операција (јануар 5)
- T 319 – Припремни задаци за општинско такмичење (фебруар 1)
- T 320 – Пробно општинско такмичење (фебруар 2)
- T 321 – Логичко–комбинаторни задаци (фебруар 2)
- T 322 – Математичко такмичење „Мислиша“ (фебруар 3)
- T 323 – Математичке укрштенице (фебруар 4)
- T 324 – Припремни задаци за окружно такмичење (март 1)
- T 325 – Пробно окружно такмичење (март 1)
- T 326 – Математичко такмичење „Кенгур без граница“ (март 2)
- T 327 – Математичке укрштенице (март 3)
- T 328 – Математичке игре (март 4)
- T 329 – Разломак као део целине (март 5)
- T 330 – Судоку (април 1).



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ОРИЈЕНТАЦИОНИ НАСТАВНИ ПЛАН И ПРОГРАМ

4. РАЗРЕД

- Т 401 – Декадни запис природног броја (септембар 4)
- Т 402 – Сабирање и одузимање природних бројева (октобар 1)
- Т 403 – Природни бројеви (октобар 2)
- Т 404 – Магични квадрати (октобар 3)
- Т 405 – Занимљиви ирази (октобар 4)
- Т 406 – Пребројавање скупова бројева (октобар 5)
- Т 407 – Решавање проблема методом дужи (новембар 1)
- Т 408 – Пребројавање скупова тачака (новембар 2)
- Т 409 – Припремни задаци за школско такмичење (1) (новембар 3)
- Т 410 – Припремни задаци за школско такмичење (2) (новембар 4)
- Т 411 – Пробно школско такмичење (новембар 5)
- Т 412 – Решавање проблема методом једначина (децембар 1)
- Т 413 – Квадрат и правоугаоник (1) (децембар 2)
- Т 414 – Квадрат и правоугаоник (2) (децембар 3)
- Т 415 – Решавање проблема методом правоугаоника (децембар 4)
- Т 416 – Рачунске операције са природним бројевима (јануар 2)
- Т 417 – Разломци (јануар 3)
- Т 418 – Проблеми тешких ситуација (јануар 4)
- Т 419 – Троугао, квадрат и правоугаоник (обим и површина) (јануар 5)
- Т 420 – Припремни задаци за општинско такмичење (фебруар 1)
- Т 421 – Пробно општинско такмичење (фебруар 2)
- Т 422 – Задаци нумерације (фебруар 2)
- Т 423 – Дешифровање рачунских операција (фебруар 3)
- Т 424 – Припремни задаци за окружно такмичење (фебруар 4)
- Т 425 – Пробно окружно такмичење (март 1)
- Т 426 – Математичко такмичење „Мислиша“
- Т 427 – Математичко такмичење „Кенгур без граница“ (март 2)
- Т 427 – Коцка и квадар (март 3)
- Т 428 – Математичке игре (март 4)
- Т 429 – Математичке укрштенице (март 5)
- Т 430 – Судоку (април 1).



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ОРИЈЕНТАЦИОНИ НАСТАВНИ ПЛАН И ПРОГРАМ 5. РАЗРЕД

- Т 501 – Дељивост природних бројева (септембар 4)
- Т 502 – Прости и сложени бројеви (октобар 1)
- Т 503 – Мала комбинаторика (октобар 2)
- Т 504 – НЗД и НЗС природних бројева (октобар 3)
- Т 505 – Скупови (октобар 4)
- Т 506 – Венови дијаграми и примене (октобар 5)
- Т 507 – Квадрат и правоугаоник (новембар 1)
- Т 508 – Коцка и квадар (новембар 2)
- Т 509 – Припремни задаци за школско такмичење (1) (новембар 3)
- Т 510 – Припремни задаци за школско такмичење (2) новембар (4)
- Т 511 – Пробно школско такмичење (новембар 5)
- Т 512 – Скупови тачака у равни (децембар 1)
- Т 513 – Разломци (1) (децембар 2)
- Т 514 – Разломци (2) (децембар 3)
- Т 515 – Одабрани задаци из Математичког листа (децембар 4)
- Т 516 – Основни појмови геометрије (јануар 3)
- Т 517 – Пребројавање скупова тачака, фигура и бројева (јануар 4)
- Т 518 – Децимални запис разломка (јануар 5)
- Т 519 – Припремни задаци за општинско такмичење (фебруар 1)
- Т 520 – Пробно општинско такмичење (фебруар 2)
- Т 521 – Дељивост (фебруар 2)
- Т 522 – Скупови (фебруар 3)
- Т 523 – Диофантове једначине у скупу природних бројева (фебруар 4)
- Т 524 – Припремни задаци за окружно такмичење (март 1)
- Т 525 – Пробно окружно такмичење (март 2)
- Т 526 – Угао (март 2)
- Т 527 – Сабирање и одузимање разломака (март 3)
- Т 528 – Бинарни бројеви (март 4)
- Т 529 – Судоку (март 5)
- Т 530 – Занимљиви математички задаци (април 1)



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ОРИЈЕНТАЦИОНИ НАСТАВНИ ПЛАН И ПРОГРАМ 6. РАЗРЕД

- Т 601 – Дирихлеов принцип (септембар 4)
- Т 602 – Цели бројеви (октобар 1)
- Т 603 – Множење и дељење целих бројева (октобар 2)
- Т 604 – Углови троугла (октобар 3)
- Т 605 – Однос страница и углова троугла (октобар 4)
- Т 606 – Геометријски доказ (октобар 5)
- Т 607 – Разломци (новембар 1)
- Т 608 – Проблеми и проценти (новембар 2)
- Т 609 – Припремни задаци за школско такмичење (1) (новембар 3)
- Т 610 – Припремни задаци за школско такмичење (2) (новембар 4)
- Т 611 – Пробно школско такмичење (новембар 5)
- Т 612 – Подударност троуглова и примене (децембар 1)
- Т 613 – Конструктивни задаци (децембар 2)
- Т 614 – Бројеви и троуглови (децембар 3)
- Т 615 – Одабрани задаци из Математичког листа (децембар 4)
- Т 616 – Дељивост бројева. Прости и сложени бројеви (јануар 3)
- Т 617 – Еуклидов алгоритам (јануар 4)
- Т 618 – Троугао (јануар 5)
- Т 619 – Припремни задаци за општинско такмичење (фебруар 1)
- Т 620 – Пробно општинско такмичење (фебруар 2)
- Т 621 – Операције са рационалним бројевима (фебруар 2)
- Т 622 – Геометријски доказ (фебруар 3)
- Т 623 – Дирихлеов принцип (2) (фебруар 4)
- Т 624 – Припремни задаци за окружно такмичење (март 1)
- Т 625 – Пробно окружно такмичење (март 2)
- Т 626 – Паралелограм (март 2)
- Т 627 – Четвороугао (март 3)
- Т 628 – Конструкције кроз недостижне тачке (март 4)
- Т 629 – Логичко–комбинаторни задаци са бројевима (март 5)
- Т 630 – Диофантове једначине у скупу целих бројева (април 1)
- Т 631 – Проблемски задаци са рационалним бројевима (април 2)
- Т 632 – Разни комбинаторни проблеми (април 3)
- Т 633 – Припремни задаци за државно такмичење (мај 1)
- Т 634 – Пробно државно такмичење (мај 2)



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ОРИЈЕНТАЦИОНИ НАСТАВНИ ПЛАН И ПРОГРАМ

7. РАЗРЕД

- T 701 – Палиндроми (септембар 4)
- T 702 – Квадрат рационалног броја (октобар 1)
- T 703 – Квадрат збира и збир квадрата (октобар 2)
- T 704 – Разлика квадрата (октобар 3)
- T 705 – Питагорина теорема (октобар 4)
- T 706 – Херонова формула (октобар 5)
- T 707 – Квадратни корен (новембар 1)
- T 708 – Ирационални бројеви (новембар 2)
- T 709 – Припремни задаци за школско такмичење (1) (новембар 3)
- T 710 – Припремни задаци за школско такмичење (2) (новембар 4)
- T 711 – Пробно школско такмичење (новембар 5)
- T 712 – Квадратни корен реалног броја (децембар 1)
- T 713 – Примена Питагорине теореме у конструктивним задацима (децембар 2)
- T 714 – Степени (децембар 3)
- T 715 – Метод последње цифре (децембар 4)
- T 716 – Шта је веће? (јануар 3)
- T 717 – Површина троугла и четвороугла (јануар 4)
- T 718 – Пропорције, проценти и примене (јануар 5)
- T 719 – Припремни задаци за школско такмичење (фебруар 1)
- T 720 – Пробно општинско такмичење (фебруар 2)
- T 721 – Многоугао (фебруар 2)
- T 722 – Значајне тачке троугла (фебруар 3)
- T 723 – Увод у комбинаторику (фебруар 4)
- T 724 – Припремни задаци за окружно такмичење (март 1)
- T 725 – Пробно окружно такмичење (март 2)
- T 726 – Примена Дирихлеовог принципа у геометрији (март 2)
- T 727 – Полиноми (март 3)
- T 728 – Примена полинома на дељивост (март 4)
- T 729 – Алгебарски разломци (март 5)
- T 730 – Диофантове једначине 1 (април 1)
- T 731 – Диофантове једначине 2 (април 2)
- T 732 – Припремни задаци за државно такмичење (април 3)
- T 733 – Припремни задаци за државно такмичење (мај 1)
- T 734 – Пробно државно такмичење (мај 2)



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ОРИЈЕНТАЦИОНИ НАСТАВНИ ПЛАН И ПРОГРАМ 8. РАЗРЕД

- T 801 – Талесова теорема (септембар 4)
- T 802 – Сличност троуглова (октобар 1)
- T 803 – Примена сличности на правоугли троугао (октобар 2)
- T 804 – Конструктивни задаци и сличност (октобар 3)
- T 805 – Тачка, права, раван (октобар 4)
- T 806 – Линеарне једначине (октобар 5)
- T 807 – Комбинаторика (новембар 1)
- T 808 – Број делилаца природног броја (новембар 2)
- T 809 – Припремни задаци за школско такмичење (новембар 3)
- T 810 – Припремни задаци за школско такмичење (новембар 4)
- T 811 – Пробно школско такмичење (новембар 5)
- T 812 – Линеарне неједначине (децембар 1)
- T 813 – Једначине и неједначине са апсолутним вредностима (децембар 2)
- T 814 – Линеарне Диофантове једначине (децембар 3)
- T 815 – Призма (децембар 4)
- T 816 – Нелинеарне Диофантове једначине (јануар 3)
- T 817 – Диофантови проблеми (јануар 4)
- T 818 – Питагорини бројеви (јануар 5)
- T 819 – Припремни задаци за општинско такмичење (фебруар 1)
- T 820 – Пробно општинско такмичење (фебруар 2)
- T 821 – Конгруенције по модулу (фебруар 2)
- T 822 – Пирамида (фебруар 3)
- T 823 – Збир цифара природног броја (фебруар 4)
- T 824 – Припремни задаци за окружно такмичење (март 1)
- T 825 – Пробно окружно такмичење (март 2)
- T 826 – Неједнакости (1) (март 2)
- T 827 – Неједнакости (2) (март 3)
- T 828 – Екстремне вредности (март 4)
- T 829 – Скупови тачака у координатној равни (март 5)
- T 830 – Системи линеарних једначина (април 1)
- T 831 – Проблеми кретања (април 2)
- T 832 – Пробни тест за математичку гимназију (април 3)
- T 833 – Припремни задаци за државно такмичење (мај 1)
- T 834 – Пробно државно такмичење (мај 2)



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

3. РАЗРЕД

ТЕМА 302 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

1. Користећи цифре 1, 9, 4, 0, 7, 3 напиши најмањи и највећи могући троцифрени број:
а) ако се дате цифре не смеју понављати;
б) ако се дате цифре смеју понављати.
2. Дат је број 3697148025. Прецртај 7 цифара тако да добијени троцифрени број буде:
а) најмањи могући;
б) највећи могући;
в) најмањи могући непаран број;
г) највећи могући паран број.
3. Напиши највећи и најмањи троцифрени број чије су све цифре:
а) парне
б) непарне
в) различите
г) једнаке
д) парне и различите
ђ) непарне и различите.
4. Одреди најмањи и највећи троцифрени природан број чије су цифре:
а) све парне;
б) све непарне;
в) две парне, а једна непарна;
г) једна парна, а две непарне.
5. Израчунај разлику најмањег троцифреног и највећег двоцифреног броја у чијим декадним записима су све цифре различите.
6. Напиши највећи и најмањи троцифрени број чији је збир цифара једнак 6.
7. Напиши највећи и најмањи троцифрени број чији је производ цифара једнак 7.
8. Напиши све троцифрене природне бројеве чији је збир цифара једнак 4.

9. Колико има троцифрених бројева код којих је производ цифара једнак 6?
10. Колико има троцифрених природних бројева чији је збир цифара 24?
11. Постоји ли у декадном бројевном систему троцифрен природан број чији је збир цифара једнак 29?
12. Постоји ли у декадном бројевном систему природни број чији је: а) збир цифара једнак 26?
13. Напиши најмањи и највећи троцифрен број чији је збир цифара једнак 19, ако се цифре: а) не могу понављати; б) могу понављати.
14. Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара једнак 36?
15. Наброј све троцифрене бројеве чији је производ цифара једнак збиру цифара?
16. Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара једнак 0?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Дате су цифре 0, 8, 5, 1, 6, 3.
Користећи дате цифре напиши најмањи и највећи троцифрен број ако се цифре:
а) не могу понављати;
б) могу понављати.
- 2) Наброј све троцифрене бројеве који се пишу помоћу цифара 1, 3 и 8, ако се:
а) цифре не смеју понављати?
б) цифре могу понављати?
- 3) Да ли је више троцифрених природних бројева чији је збир цифара 25 или оних чији је производ цифара 25?
- 4) Колико има троцифрених бројева чији је:
а) збир цифара једнак 5;
б) производ цифара 8?
- 5) Да ли су тачна тврђења:
а) Ако је један троцифрен број већи од другог, онда је и збир цифара првог броја већи од збира цифара другог броја?
б) Ако је један троцифрен број већи од другог, онда је и производ цифара првог броја већи од производа цифара другог броја?
в) У сваком троцифреном природном броју, збир цифара је увек мањи од производа цифара?
Образложи свако решење.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

4. РАЗРЕД

ТЕМА 402 ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

1. Може ли збир два узастопна природна броја бити 20212022? Одговор образложи.
2. Да ли је збир четири узастопна природна броја паран или непаран број?
3. Зашто је збир 10 узастопних природних бројева увек непаран број?
4. Да ли је могуће бројеве од 1 до 14 поделити у две групе (без заједничких елемената) тако да зборови бројева у те две групе буду једнаки?
5. Може ли се скуп природних бројева $\{ 1, 2, 3, \dots, 10, 11 \}$ поделити у два подскупа: а) без заједничких елемената; б) са само једним заједничким елементом тако да збир бројева у једном подскупу буде једнак збиру елемената у другом подскупу?
6. Може ли се скуп природних бројева $\{ 1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12 \}$ поделити у два подскупа без заједничких елемената тако да збир бројева у једном подскупу буде једнак збиру елемената у другом подскупу?
7. Може ли се скуп природних бројева $\{ 1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, 13 \}$ поделити у два подскупа: а) без заједничких елемената; б) са само једним заједничким елементом тако да збир бројева у једном подскупу буде једнак збиру елемената у другом подскупу?
8. Пера је замислио два природна броја. Прво је израчунао разлику, а потом и производ та два броја и када је разлику замишљених бројева помножио њиховим производом добио је број: а) 36; б) 45. Да ли је Пера погрешно у рачуну?
9. Колико има природних бројева мањих од 10 000 код којих је збир цифара једнак 37 ?
10. Запиши све природне бројеве мање од 10 000 чији је збир цифара већи од 34 .
11. Одреди најмањи и највећи шестоцифрени природан број код кога је збир парних цифара једнак збиру непарних цифара.
12. Колико има троцифрених, а колико четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара једнак 6?
13. Постоји ли природан број код кога је производ цифара једнак 91.
14. Напиши све природне бројеве мање од 10 000 код којих је производ цифара већи од 0, а мањи од 3.

15. Да ли постоје четвороцифрени природни бројеви чији је производ цифара једнак:
а) 400; б) 600; с) 800; д) 1000; е) 2000 ?
16. Колико четвороцифрених природних бројева има производ цифара већи од 6000 ?
17. Одреди најмањи и највећи петоцифрен број код кога је производ цифара једнак 6.
18. Постоји ли петоцифрен природан број у чијем декадном запису је производ парних цифара једнак производу непарних цифара ?
19. Колико има природних бројева мањих од 1000 код којих је производ цифара једнак 64?
20. Напиши природан број који има десет хиљада, једанаест стотина, дванаест десетица и тринаест јединица.
21. Могу ли се међу бројевима 1, 5, 9, 13, 17, ... 1993, 1997 изабрати: а) три тако да њихов збир буде 1998 ; б) четири тако да њихов збир буде 1999 ?
22. Може ли производ два узастопна природна броја бити : а) 1998 ; б) 1999 ?
23. Дате су цифре 0, 5 и 8. Напиши највећи и најмањи петоцифрен природан број који садржи дате цифре, ако се морају употребити све цифре и ако се дате цифре могу понављати. Колика је разлика та два броја ?
24. Дат је број 581 909 786. Прецртај пет цифара тако да добијени број (кога чине преостале цифре) буде: а) најмањи могућ; б) највећи могућ.
25. Колико има петоцифрених бројева код којих је производ цифара једнак 4 ?
26. Колико има четвороцифрених природних бројева код којих је збир цифара једнак 4 ?
27. Напиши све четвороцифрене бројеве чији је збир цифара 10, а цифра десетица 5.
28. Помоћу цифара 0, 2, 3, 5, 6, 7 и 8 написати највећи и најмањи шестоцифрен природан број користећи сваку цифру: а) само једанпут; б) највише три пута.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Да ли збир $1 + 2 + 3 + \dots + 100 + 101$ паран или непаран број?
- 2) Одреди најмањи: а) паран; б) непаран природан број чији је збир цифара 60.
- 3) Напиши најмањи и највећи седмоцифрен број чији је производ цифара једнак 162.
- 4) Да ли има више природних бројева мањих од 10 000 чији је збир цифара једнак 4 или је више оних код којих је производ цифара једнак 8 ?
- 5) Може ли производ два троцифрена природна броја бити: а) 10087; б) 999099?



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

5. РАЗРЕД

Т 502 ПРОСТИ БРОЈЕВИ

1. Дат је низ природних бројева 1, 3, 8, 17, 23, 25, 32, 37, 47, 51. Који чланови низа су прости бројеви? Који чланови низа су сложени бројеви?
2. Колико има парних простих бројева?
3. Да ли је збир два проста броја, прост или сложен број?
4. Да ли је производ два проста броја, прост или сложен број?
5. Може ли збир два сложена броја бити прост број?
6. За колико се разликују најмањи троцифрен и највећи двоцифрен прост број.
7. Одреди два највећа двоцифрена проста броја који су прости бројеви близанци.
8. Колико има простих бројева који су већи од 11 и мањи од 44?
9. Збир два проста броја је 91. О којим простим бројевима је реч? Колико таквих парова простих бројева има?
10. На колико начина се број 40 може приказати као збир два проста броја?
Напомена: $x + y = y + x$ је један исти начин.
11. Све парне бројеве веће од 35 и мање од 53 напиши као збир два проста броја.
12. Докажи да се сваки прост број већи од 11 може приказати као збир два сложена броја.
13. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p + 2q = 96$?
14. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p + 2q = 100$?
15. Постоје ли прости бројеви чији је производ једнак 127?

16. Напиши десет узастопних сложених бројева.
17. Производ два узастопна сложена броја је 240. Који су то бројеви?
18. Одреди два проста броја чији је збир 120, а разлика најмања могућа.
19. Колико најмање, а колико највише простих бројева треба сабрати да би се добио збир 100?
20. Колико најмање, а колико највише природних бројева треба сабрати да би се добио збир 101?
21. Постоје ли прости бројеви p , q и r такви да је $p^2 + q^2 = r$?
Колико таквих бројева има?
22. Одреди два проста броја таква да су:
 - а) њихов збир и разлика прости бројеви;
 - б) њихов збир и разлика сложени бројеви;
 - в) њихов збир прост, а разлика сложен број;
 - г) њихов збир сложен, а разлика прост број.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Бројеви 13 и 31 су прости. Одредити све двоцифрене просте бројеве такве да када њихове цифре замене места опет се добије прост број.
- 2) Колико највише простих бројева може бити у оквиру једне десетице? Образложи одговор.
- 3) Сви прости бројеви поређани су у растући низ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ... Одреди три узастопна члана низа простих бројева ако је њихов збир 121.
- 4) Одредити све просте бројеве p такве да је и $p^2 + 9$ такође прост број.
- 5) Одреди два сложена броја таква да су:
 - а) њихов збир и разлика прости бројеви;
 - б) њихов збир и разлика сложени бројеви;
 - в) њихов збир прост, а разлика сложен број;
 - г) њихов збир сложен, а разлика прост број.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

6. РАЗРЕД

ТЕМА 602 ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

1. Израчунај вредност израза $|a| - |-a|$.
2. Може ли збир три узастопна цела броја бити 2?
3. Колико најмање узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 101?
4. Колико највише целих узастопних бројева треба сабрати да би се добио збир 3?
5. Може ли цео број бити већи од своје апсолутне вредности?
6. Израчунај вредност израза $A = |a + 3| + |a - 3| + |a - 1|$, ако је $a = -10$.
7. За $x = -1$ и $y = -5$ израчунај вредност израза: $|x - y| + 2|y| - |x + y|$.
8. Израчуј суму: $|1 - 2| + |3 - 4| + \dots + |2019 - 2020| + |2021 - 2022|$.
9. Ако је $x = 5$ израчунати суму $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 100|$.
10. Ако је $x + y = 0$, онда је $|x| = |y|$. Докажи.
Да ли важи обрнуто, тј. ако је $|x| = |y|$, онда је $x + y = 0$?
11. Израчунај збир десет узастопних целих бројева ако су:
а) само четири броја позитивна;
б) само три броја негативна.
12. Могу ли се у следећим једнакостима звезде заменити знацима $+$ или $-$ тако да се добију тачне једнакости:
а) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0$;
б) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0$?

13. Колико је:
 - a) $(-25) + (-24) + \dots + 28 + 29$;
 - b) $(-85) + (-84) + \dots + 87 + 88$?
14. Упореди целе бројеве a и b ако је $a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100 + 101$ и $b = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 97 - 99 + 101 - 103$.
15. Реши по x следеће једначине:
 - a) $(-10) + (-9) + \dots + (x-1) + x = -44$ ($x \in \mathbb{Z}$) ;
 - b) $x + (x+1) + \dots + 17 + 18 = 51$ ($x \in \mathbb{Z}$) .
16. Збир 10 узастопних целих бројева је 15. Који су то бројеви?
17. Збир 2021 узастопних целих бројева једнак је 0. О којим бројевима је реч ?
18. Збир неколико узастопних целих бројева је 25. О којим бројевима је реч?
19. Одреди 2021 узастопних целих броја таква да је њихов збир једнак 2021.
20. Колико решења у скупу целих бројева има једначина: $|x| + |y| = 3$?
21. У поља квадрата 3×3 распореди бројеве из скупа $\{-1, 0 \text{ и } 1\}$ тако да је збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали различит. Да ли је то могуће ?
22. На табли су написани бројеви $-6, -5, -4, -3, -2, -1$. Дозвољено је у једном кораку било која два броја увећати за по 1. Да ли се, после извесног броја корака, могу добити сви једнаки бројеви?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x + y = -17$ и $x - y = 6$?
- 2) Упореди целе бројеве a и b ако је
 $a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2019 - 2020 + 2021 - 2022$ и
 $b = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 2018 - 2020 + 2022$.
- 3) Одреди све узастопне целе бројеве тако да је њихов збир -35 .
- 4) Збир три целих броја је 0, а збир њихових апсолутних вредности је 8. О којим бројевима је реч? Колико има решења?
- 5) На кружници је записано шест целих бројева. Сваки од њих је једнак апсолутној вредности разлике два броја који су на кружници његови претходници. Одреди записане бројеве и њихов распоред на кружници, ако је збир свих шест бројева једнак 4.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

6. РАЗРЕД

ТЕМА 702 КВАДРАТ РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

Квадрирање као операцију множења неког броја самим собом позната је још из четвртог разреда, када је израчунавана површина квадрата. У математици, дефиниције представљају реченице којима се уводе или ближе објашњавају нови математички појмови. На основу реченог се може прецизније одредити и појам квадрата рационалног броја, а одговарајућа дефиниција је: Ако је x неки рационалан број онда се број $x \cdot x$ означава симболом x^2 и назива *квадрат рационалног броја* x .

Проблеми који следе су примери који показују само неке ситуације у којима се користе бројеви и квадрати бројева из до сада упознатих скупова бројева (природни, цели и рационални бројеви).

ПРИМЕР 1. Ако је r рационалан број онда је $r^2 \geq 0$. Докажи.

РЕШЕЊЕ: Рационалан број може бити негативан, нула или позитиван број. 1) Ако је $r < 0$, онда је $r^2 = r \cdot r > 0$, јер је производ два негативна броја увек позитиван;

2) Ако је $r = 0$, онда је $r^2 = r \cdot r = 0 \cdot 0 = 0$;

3) Ако је $r > 0$, онда је $r^2 = r \cdot r > 0$, јер је производ два позитивна броја увек позитиван.

Према томе ако је r било који рационалан број, његов квадрат је увек ненегативан број (нула или позитиван број).

*

Метод који је коришћен код доказивања претходног проблема назива се доказивање разликовањем случајева. Метод разликовања случајева се често користи у математици код доказивања тврђења и решавања проблема.

ПРИМЕР 2. Нека су x и y рационални бројеви. Да ли су тачна тврђења: а) Ако је $x = y$ онда је $x^2 = y^2$; б) Ако је $x^2 = y^2$, онда је и $x = y$?

РЕШЕЊЕ: а) Ако су x и y рационални бројеви такви да је $x = y$, онда је $x^2 = x \cdot x = y \cdot y = y^2$.

б) Ово тврђење је тачно за неке вредности x и y (нпр. ако су оба рационална броја позитивна или оба негативна), а није тачно за неке друге вредности x и y . На пример $7^2 = (-7)^2 = 49$, а 7 и -7 нису једнаки бројеви.

Први део претходног проблема доказан је методом који се у математици најчешће назива директан доказ. Други део проблема је решен, раније већ помињаним, методом тражења контрапримера, јер је опет наведен бар један пример који доказује да исказана претпоставка (хипотеза) није тачна.

Пре него што се пређе на наредне примере важно је увести још један појам. Природан број n назива се *потпун квадрат*, ако постоји природан број k такав да је $n = k^2$. Тако, на пример, бројеви $9 = 3^2$, $64 = 8^2$, $121 = 11^2$ јесу потпуни квадрати, а бројеви 12, 63, 75 нису потпуни квадрати, јер се не могу приказати као квадрати неког природног броја.

ПРИМЕР 3. Којим цифрама се завршавају квадрати целих бројева? Које цифре не могу бити последње цифре квадрата целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Цели бројеви се завршавају цифрама 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Њихови квадрати се завршавају цифрама $0 \cdot 0$, $1 \cdot 1$, ... $9 \cdot 9$, тј. цифрама 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Закључак је се квадрати целих бројева увек завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8.

ПРИМЕР 4. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 8888$?

РЕШЕЊЕ: У решавању овог проблема користиће се већ помињани метод разликовања разликовања случајева, само што ће се за истицање свих могућих случајева користити таблица. У почетним хоризонталним пољима таблице су наведене последње цифре броја x^2 (из претходног примера су то цифре 0, 1, 4, 5, 6 и 9), а у почетним вертикалним пољима последња цифра броја $5y$ (то су цифре 0 и 5, јер се сваки цео број y , без обзира да ли је позитиван, нула или негативан, помножен са 5 завршава цифром 0 (ако је y паран) и цифром 5 (ако је y непаран)).

$5y \downarrow$	$x^2 \rightarrow$	0	1	4	5	6	9
0							
5							

Други корак је да се у свако поље таблице упише збир одговарајућих поља у таблици, тј. збир последњих цифара бројева x^2 и $5y$. Добија се таблица:

$5y \downarrow$	$x^2 \rightarrow$	0	1	4	5	6	9
0		0	1	4	5	6	9
5		5	6	9	0	1	4

Из таблице следи да се број $x^2 + 5y$ увек завршава цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршава цифрама 2, 3, 7 и 8. Коначно, закључак је да је дата једнакост немогућа, тј. да не постоје цели бројеви x и y такви да се број $x^2 + 5y$ завршава цифром 8.

ПРИМЕР 5. Одреди најмањи природан број n , такав да је за целе бројеве a и b испуњена једнакост $2019a^2 + 15b^2 = 222...222$ где је број двојки једнак n ($n \in \mathbb{N}$).

РЕШЕЊЕ: Бројеви a^2 и b^2 завршавају се цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Тада се број $2019a^2$ завршава цифрама 0, 9, 6, 5, 4, 1, а број $15b^2$ цифрама 0 или 5. Разматрањем свих могућности јасно је да се $2019a^2 + 15b^2$ завршава цифрама 0, 9, 6, 5, 4, 1, односно 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршава цифром 2. Према томе, тражени природан број n не постоји.

ПРИМЕР 6. Ако је n природан број, да ли је могућа једнакост:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = 9876543?$$

РЕШЕЊЕ: Нека је $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = S$.¹ Када се на дати збир S примени својство комутације и асоцијације за сабирања рационалних бројева и изврши рационално груписање добија се да је $S = (2n - 1) + (2n - 3) + \dots + 5 + 3 + 1$. Ако се претходне две релације саберу тако што ће се сабрати одговарајући сабирци из прве и друге суме, добиће се да је $2S = 2n + 2n + \dots + 2n + 2n$, где је број таквих сабирака n , па је $2S = n \cdot 2n = 2n^2$ и $S = n^2$. Како се n^2 може завршавати само цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада се не завршава цифром 3, то једнакост $1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = 9876543$ није могућа.

ПРИМЕР 7. Ако је p прост број, онда број p^2 има тачно три делиоца рачунајући јединицу и њега. Докажи.

РЕШЕЊЕ: Како је p прост број сви делиоци броја $p^2 = p \cdot p$ су 1, p и p^2 и има их тачно три.

ЗАДАЦИ

- Ако је $a = -\frac{2}{3}$ израчунај вредност израза $\frac{3a^2 - 6a + 2}{a^2 + 3a + 2}$.
- Одреди рационалне бројеве x и y такве да је $3x^2 = 192$ и $5y^2 = 0,8$?
- Одреди збир решења једначина: $4x^2 = 49$ и $81x^2 = 16$?
- Ако су x и y рационални бројеви, онда је $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$. Докажи. Да ли је и $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$?
- Ако је r рационалан број, упореди по величини рационалне бројеве: r^2 , $|r^2|$ и $|r|^2$.
- Нека је r рационалан број. Шта је веће: r или r^2 ?
- Који рационални бројеви испуњавају следеће неједнакости: а) $x^2 \geq 36$; б) $7y^2 < 0,28$?
- Одреди збир свих решења неједначине $x^2 \leq 81$?
- Колико има целих бројева a таквих да је $25 \leq a^2 < 144$? Колики је њихов збир?
- У позоришној дворани са два партера (лево и десно) у сваком партеру има онолико редова, колико у реду има столица. Ако у сваком реду има једнак број столица и ако у сали има 578 столица, колико има редова у сали и колико је столица у једном реду?

¹ Појам збир се често, и у нашем језику, замењује речју сума (или summa) која има интернационално значење и због тога се најчешће као ознака за збир користи прво слово речи сума, а то је S .

11. Нека су x и y рационални бројеви: Да ли су тачна тврђења:
а) Ако је $x < y$ онда је $x^2 < y^2$; б) Ако је $x^2 < y^2$, онда је и $x < y$?
12. Нека су x и y цели бројеви и нека је $x^2 + y^2 = 2$. Одреди све могуће вредност израза $x + y$.
13. Ако је n паран природан број, онда је n^2 такође паран природни број. Докажи. Да ли слично тврђење важи и за непаран број?
14. Докажи тврђење: Ако је природан број n ($n > 1$) дељив природним бројем k ($1 < k < n$), онда је n^2 дељиво са k^2 .
15. Одреди најмањи природан број n такав да је $1350 \cdot n$ потпун квадрат.
16. Постоји ли цео број чији је квадрат једнак 7776?
17. Докажи да је број $201920192019^2 - 1$ дељив са 10.
18. Колики је збир последњих цифара бројева $1^2, 2^2, \dots, 99^2, 100^2$?
19. Одреди последњу цифру броја $S = 1^2 + 2^2 + \dots + 2018^2 + 2019^2$.
20. Докажи да је збир последњих цифара бројева $1^2, 2^2, \dots, 9999^2$ дељив са 9000.
21. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 + y^2 = 11$?
22. Дешифруј квадрирање $(5c + 1)^2 = \overline{abca}$, ако једнаким цифрама одговарају једнака слова и различитим цифрама различита слова.
23. Постоји ли двоцифрен природан број који је једнак квадрату збира својих цифара?
24. Ако је $x > y$, шта је веће: $(x - y)^2$ или $(x + y)^2$?
25. Да ли је тачно тврђење: Ако је природан број n^2 ($n > 1$) дељив простим бројем p , онда је n^2 дељив и са p^2 ?
26. Квадрати свих природних бројева записани су редом један за другим и тако је добијен низ: 1491625364964... Одреди цифру која се налази на 368. месту у том низу.
27. Мој прадеда је рођен у другој половини XIX века. Које године је он славио свој 70 рођендан, ако је године са редним бројем x^2 , имао тачно x година?
28. Конвексан четвороугао подељем је својим дијагоналама на четири троугла чије су површине природни бројеви a, b, c и d . Докажи да је производ $a \cdot b \cdot c \cdot d$ потпун квадрат.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Колико има природних бројева мањих од 1000 који имају тачно три делиоца?
- 2) Постоји ли природан број n такав да је $n^2 - 8$ дељиво са 5?
- 3) Дешифруј квадрирање: $(**)^2 = 45 \cdot * 2 *$.
- 4) Да ли је број 2121212121 потпун квадрат?
- 5) Дат је број $a = 0,4444\dots$ са бесконачно много децималних цифара које су све једнаке 4. Докажи да је a квадрат рационалног броја и израчунај a^2 .



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“

ШКОЛСКА 2021/22

8. РАЗРЕД

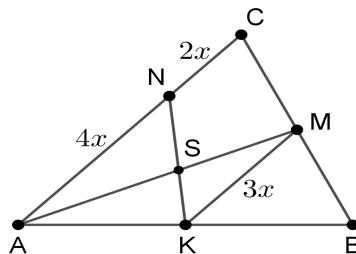
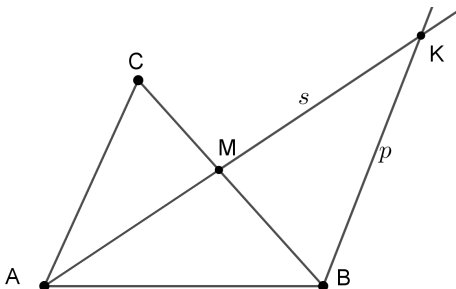
Т 802 СЛИЧНОСТ

Сличност фигура је веома значајна релација. Критеријуми сличности фигура заснивају се на теоремама (ставовима) о сличности троуглова и имају значајну примену у математичкој науци и свакодневном животу. Циљ ове теме је да прикаже карактеристична тврђења и задатке у којима се као ефикасан начин решавања користи сличност.

ПРИМЕР 8. У троуглу ABC , симетрала $\angle BAC$ сече страницу BC у тачки M . Докажи да је $BM : CM = AB : AC$.

РЕШЕЊЕ: Нека права $p \parallel AC$ садржи тачку B и симетралу $\angle BAC$ сече у тачки K . Следи да је $\angle BAM = \angle CAM = \angle MKB = \gamma/2$. Тада су троуглови AMC и BMK слични ($\angle AMC = \angle BMK$ – као унакрсни и $\angle CAM = \angle MKB$ – као углови са паралелним крацима). Из сличности троуглова следи пропорција $BM : CM = BK : AC$. Како је троугао ABK једнакокрак ($\angle BAM = \angle MKB$), то је $BK = AB$ и $BM : CM = AB : AC$ (види слику).

Из претходног доказа следи да је доказана теорема општа, тј. да симетрала једног угла у троуглу дели наспрамну страницу троугла у односу страница троугла које граде тај угао.



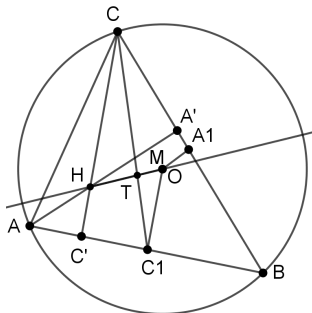
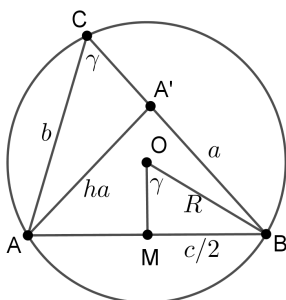
ПРИМЕР 9. Нека су K и N редом тачке на страницама AB и AC троугла ABC , при чему је $AK = BK$ и $AN = 2NC$. Одреди у каквом односу дуж KN дели тежишну дуж AM троугла ABC ?

РЕШЕЊЕ: Нека се дужи AM и KN секу у тачки S и нека је $AC = 6x$. Како је K средиште дужи AB , а M средиште дужи BC , то је KM средња линија троугла ABC , тј. $KM \parallel AC$ и $KM = 3x$. Тада су троуглови ASN и KMS слични, јер су им одговарајући углови једнаки. Из сличности троуглова следи да је $AS : SM = AN : KM = 4x : 3x = 4 : 3$ (види слику).

ПРИМЕР 10. Ако су b и c странице, h_a висина, R полупречник описаног круга и P површина троугла ABC , онда је: а) $b \cdot c = 2R \cdot h_a$; б) $R = \frac{abc}{4P}$.

РЕШЕЊЕ: а) Нека је A' подножје висине h_a и M средиште странице AB . Тада је $\triangle AA'C \sim \triangle BOM$ ($\angle AA'C = \angle BOM = 90^\circ$ и $\angle ACA' = \angle BOM = \gamma$). Из сличности троуглова је $b : h_a = R : c/2$, одакле је $b \cdot c = 2R \cdot h_a$.

б) Ако се добијена једнакост помножи са a , добија се $a \cdot b \cdot c = 2R \cdot ah_a$. Како је $ah_a = 2P$, то је $a \cdot b \cdot c = 4RP$ и коначно је $R = \frac{abc}{4P}$.



ПРИМЕР 11. Нека су H , T , и O редом ортоцентар, тежиште и центар круга описаног око датог троугла ABC . Докажи: а) да су тачке H , T и O колинеарне (Ојлерова права); б) да је $HT : TO = 2 : 1$.

РЕШЕЊЕ: а) Нека је M тачка на правој HT , таква да је $HT : TM = 2 : 1$. Тада је $\triangle HCT \sim \triangle T_1OC_1$ ($\angle HTC = \angle MTC_1$ – као унакрсни углови и $CT : CT_1 = HT : TM = 2 : 1$). Из сличности се добија да је $\angle HCT = \angle TC_1M$, па је $CH \parallel C_1M$. Како је $CH \perp AB$, то је и $C_1M \perp AB$, што значи да је C_1M симетрала странице AB . На идентичан начин се доказује да је A_1M симетрала странице BC . Како је M пресек симетрала страница AB и BC то је M центар описаног круга, тј $M \equiv O$. б) Други део тврђења следи директно из већ доказане чињенице да је тачка $M \equiv O$ бирана тако да је $HT : TM = HT : TO = 2 : 1$.

Права која садржи три значајне тачке троугла – ортоцентар, тежиште и центар описаног круга назива се Ојлерова права. Ова теорема чији је аутор један од највећих светских математичара, Леонард Ојлер, публикована је 1765. године. Тада је Ојлер објавио и резултате који се односе на Ојлерову (Фојербахову) кружницу која садржи средишта страница троугла, подножја висина и средишта растојања од темена до ортоцентра троугла. Центар Ојлерове кружнице је средиште дужи HO .

ЗАДАЦИ

- Дат је једнакокраки троугао чија је основица 10cm, а крак 13cm. Одреди површину њему сличног троугла чија је дужа висина 24cm.
- Из тачке A која је 120m удаљена од вертикалног торња BC , врх торња C се види под углом α . Из тачке D која је за 90m ближа подножју торња B , врх торња се види под углом $90^\circ - \alpha$. Колика је висина торња ?

3. У унутрашњој области квадрата $ABCD$ дата је тачка M , тако да је угао AMB прав, а $BM = 9\text{cm}$. Права BM пресеца дуж CD у тачки K тако да је $CK : DK = 3 : 1$. Израчунати површину датог квадрата.
4. Основица BC једнакокраког троугла ABC једнака је половини крака AC . Висина која одговара краку је дуж BD . Докажи да је $AD = 7 \cdot CD$.
5. У троуглу ABC тачка D је на страници BC и дели је у односу $BD : DC = 2 : 1$. Израчунај у ком односу тежишна дуж CE дели дуж AD ?
6. У правоуглом трапезу $ABCD$ основице су $AB = 19$ и $CD = 11$, а већи крак $BC = 10$. Ако је M средиште BC , а N тачка праве DA таква да је MN нормално на BC , одреди дужину MN .
7. На страницама AC и BC троугла ABC дате су редом тачке K и L , тако да је $AK : KC = 7 : 4$ и $BL : LC = 2 : 3$. Права KL пересеца продужетак странице AB у тачки M . Одреди однос $AB : BM$.
8. На страници AB , троугола ABC , дата је тачка D , тако да је $\angle BCD = \angle BAC$. Одреди CD , ако је $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
9. Странице BC и AC троугла ABC имају дужину a и b и заклапају угао од 120° . Колика је дужина симетрале угла ACB ?
10. Симетрала $\angle ABC$ троугла ABC сече страницу AC у тачки E . Нека је M средиште дужи BE , а F пресечна тачка праве AC и нормале кроз M на BE . Доказати да је $EF^2 = AF \cdot CF$.
11. Симетрале углова на основици $BC = a$ једнакокраког троугла секу наспрамне странице $AB = AC = b$ у тачкама M и N . Доказати да је $MN = \frac{ab}{a+b}$.
12. Нека је M тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да важи неједнакост: $AM \cdot BC < AB \cdot MC + AC \cdot MB$.
13. У троуглу ABC чија је страница $AB = 15\text{cm}$, а висина $CC' = 10\text{cm}$, уписан је квадрат $MNPQ$. Одреди обим и површину квадрата, ако су темена M и N на страници AB , теме P је на страници BC и теме Q је на страници AC .
14. У оштроуглом троуглу ABC страница AC је мања од странице BC . У тачки A конструисана је права $p \perp AC$ и у тачки B је конструисана права $q \perp BC$. Нека се праве p и q секу у тачки D и нека права која садржи тачку A и нормална је на CD сече BC у тачки M . Одреди дуж AB , ако је $BM = m$ и $CM = n$.
15. Из темена B ромба $ABCD$ конструисане су висине BP и BQ , при чему страница AD садржи тачку P , а страница CD садржи тачку Q . Праве BP и BQ секу дијагоналу AC редом у тачкама M и N тако да је $AM = m$ и $MN = n$. Израчунај PQ у функцији m и n .
16. Око круга полупречника r описан је и у круг је уписан правилни n -тоугао. Ако је a страница описаног, а b страница уписаног n -тоугла онда је $a = \frac{2rb}{\sqrt{4r^2 - b^2}}$. Докажи.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Дужи a , b и c су странице троугла ABC . Ако је $\angle BAC = 2\angle ABC$ онда је $a^2 = b(b + c)$. Докажи. Важи ли обрнуто тврђење?
- 2) У паралелограму $ABCD$ на страницама AB и BC дате су тачке E и F тако да је $AE = 2BE$ и $BF = 3CF$. Ако је S пресечна тачка правих AF и DE , одредити однос $AS : SF$.
- 3) У троуглу ABC конструисане су нормале BE и CF на симетралу AD угла $\angle CAB$. Доказати да је тада $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.
- 4) У троугао ABC чија је страница $AB = 56$, а висина $CC' = 28$ уписан је правоугаоник $MNPQ$ чије се странице односе као $3 : 2$. Колика је површина тог правоугаоника, тако да су темена M и N на страници AB , теме P је на страници BC и теме Q је на страници AC .
- 5) Дужина основице BC једнакокраког троугла ABC је a , а дужина крака је b . Ако је $\angle A = 20^\circ$, доказати да је тада и $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

