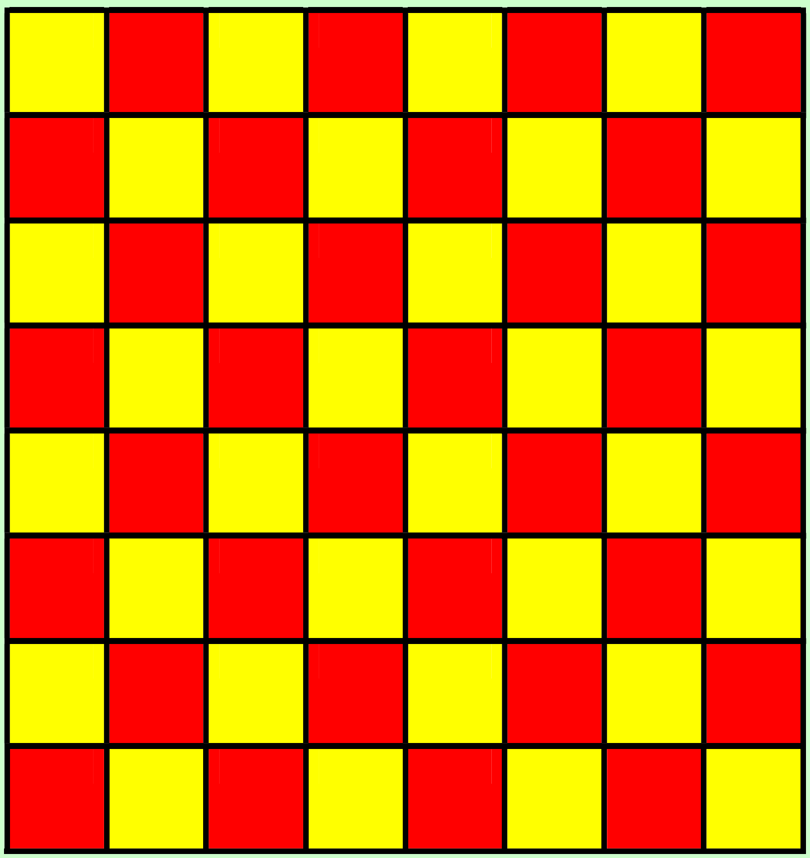
ДИОФАНТ

ЕЛЕКТРОНСКИ ЧАСОПИС ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ



ГОДИНА I – БРОЈ 25

ВАЉЕВО – МАРТ 2022

ДИОФАНТ

Електронски часопис за
додатну наставу математике

Година 1.

Број 25

Ваљево, март 2022.

Уредник часописа:

др Војислав Андрић (voja.andric@gmail.com)

Издавач:

Математички клуб „Диофант“ Ваљево,

14000 Ваљево, Поп Лукина 38

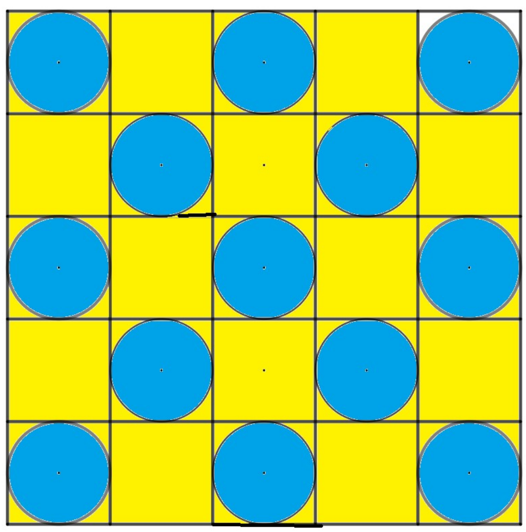
Телефон 065 291 22 00; е – mail: diofant2020@gmail.com

Све прилоге, предлоге и примедбе слати путем електронских адреса:
diofant2020@gmail.com и voja.andric@gmail.com

Часопис је бесплатан

Излази повремено и по потреби

САДРЖАЈ



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“
ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

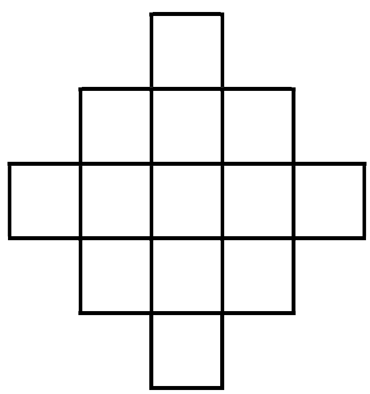
3. РАЗРЕД

1. Нека је *a* највећи непаран број друге стотине, *b* најмањи паран број четврте стотине и *c* број шесте стотине чије све цифре су једнаке. Одреди бројеве *a*, *b* и *c* и израчунај вредност израза $c - b + a$.

2. Колико има непарних троцифрених бројева чији је цифра стотина је већа од 6?

3. Бројеве 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41 распореди у поља (магичног) квадрата 3 x 3 тако да збир бројева у сваком реду, колони и дијагонали буде једнак.

4. Колико различитих дужи, а колико квадрата видиш на следећој слици?



5. Одреди цифре A, B, C и D, ако је ABC + CBA = DDD и ако једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре. Колико има решења?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“
ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

4. РАЗРЕД

1. Збир три броја је 187. Ако се првом броју дода 5, другом одузме 5, а трећи помножи са 5 добиће се једнаки бројеви. Одреди о којим бројевима је реч?

2. Колико има четвороцифрених непарних бројева чија цифра хиљада је парна, цифра стотина мања од 7, а цифра десетица већа од 7?

3. Ако се једна страница правоугаоника смањи за 6 cm, а а друга повећа за 4 cm, добије се квадрат чија је површина једнака површини датог правоугаоника. Одреди странице датог правоугаоника и добијеног квадрата.

4. Правило је да се у једој улици куће са леве стране улице нумеришу непарним, а куће са десне стране улице нумеришу парним бројевима. Ако се куће у тој улици нумеришу у једном правцу Ленина кућа ће имати кућни број 37. Ако се куће у тој улици нумеришу у супротном правцу Ленина кућа ће имати кућни број 68. Колико кућа има у Лениној улици?

5. Дат је бројевни ребус ТРИ + ТРИ = ШЕСТ у коме једнаким словима одговарају једнака слова и различитим словима одговарају различите цифре. Колико решења има дати бројевни ребус?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“
ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

5. РАЗРЕД

1. Збир четири броја је 256. Ако се првом дода 7, другом одузме 7, трећи помножи са 7 и четврти подели са 7, добијају се једнаки бројеви. О којим бројевима је реч?

2. Дат је разломак $\frac{p}{q}$ (p и q су природни бројеви и $p < q$). Напиши низ од најмањег до највећег разломка облика $\frac{p}{q}$, ако је $p \cdot q = 180$.

3. Збир угла α, угла суплементног са α и угла комплементног са α је 230°. Одреди угао α.

4. Одреди све просте бројеве x и y такве да је $x + y = 84$. Колики је збир свих могућих вредности броја x?

5. Дат је скуп S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }. Анка је написала све подскупове скупа S који имају два елемента. Бранка је сабрала све бројеве у подскуповима које је написала Анка. Колико подскупова је написала Анка? Колики је збир бројева који је израчунала Бранка?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“
ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

6. РАЗРЕД

1. Збир четири цела броја је – 9, а њихов производ је – 30. Одреди збир апсолутних вредности тих бројева.

2. Дат је троугао ABC у коме је угао $\angle ABC = 38°$. Симетрала спољашњег угла код темена C пресеца праву AB (продужетак дужи AB) у тачки M, тако да је $\angle AMC = 22°$. Одреди углове троугла ABC.

3. Дата су 2022 различита проста броја? Докажи да се бар 505 датих простих бројева завршавају истом цифром.

4. У унутрашњој области троугла ABC дата је тачка M. Докажи да је:
   а) $\angle AMB > \angle ACB$; б) $AM + MB < AC + BC$.

5. Постоје ли прости бројеви p, q и r такви да је $p + 3q + 5r = 2022$?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

7. РАЗРЕД

1. Доказати да је број $6^{2022} + 7^{2022} + 8^{2022} + 9^{2022}$ дељив са 10.
2. Дат је једнакостранични троугао ABC и тачка O која је центар круга описаног око троугла ABC. На страници AB дата је тачка M, а на страници AC тачка N, тако да је AM + AN = AB. Доказати да је OM = ON и одредити угао $\angle$MON.
3. Дати су природни бројеви $x = 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 6^5$ и $y = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2$. Колико делилаца има број $x + y$?
4. Висине троугла ABC су 12, 15 и 20. Одреди полупречник круга уписаног у дати троугао.
5. Природни бројеви 2, 5, 5, *m, n*, 11 поређани су у низ тако да сваки следећи број није мањи од претходног. Одреди бројеве *m* и *n* тако да аритметичка средина добијених 6 бројева буде цео број.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

8. РАЗРЕД

1. Дат је једнакокраки троугао ABC у коме је AC = BC = 9 cm и AB = 6 cm. Кружница уписана у троугао ABC додирује краке AC и BC у тачкама D и E. Одреди дужину дужи DE.

2. Одреди скуп решења неједначине $||x-5|-6|<2x+8$.

3. Дата је правилна четворострана призма ABCDA’B’C’D’ чија је основна ивица 8 cm и висина 18 cm. На бочним ивицама призме AA' и BB' дате су тачке M и N, тако да је AM = BN = 6 cm. Раван π садржи дуж MN, пресеца призму и дели призму на два полиедра једнаких запремина. Одредити површине добијених полиедара.

4. Конвексан многоугао M има m страница, а конвексан многоугао N има n страница. Одреди m и n, ако многоугао M има 36 дијагонала више од многоугла N.

5. Дата је једначина $x \cdot y^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 9 \cdot 10$. Колико решења у скупу целих бројева има дата једначина?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 05. 03. 2022.

3. РАЗРЕД

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

1. Нека је a највећи непаран број друге стотине, b најмањи паран број четврте стотине и c број шесте стотине чије све цифре су једнаке. Одреди бројеве a, b и c и израчунај вредност израза $c - b + a$.

Тражени бројеви су: $a = 199$, $b = 302$ и $c = 555$.
Вредност израза $c - b + a = 555 - 302 + 199 = 253 + 199 = 452$.

2. Колико има непарних троцифрених бројева чији је цифра стотина је већа од 6?

Прво решење: У свакој од стотина 7*Н, 8*Н, 9*Н има по 50 непарних бројева, па је то укуно $3 \cdot 50 = 150$ бројева.

Друго решење: За прву цифру има три кандидата: 7, 8, 9. Друга цифра може бити било која од 10 цифара. Трећа цифра је непарна и могуће је само 5 вредности. Тражених бројева има $3 \cdot 10 \cdot 5 = 30 \cdot 5 = 150$.

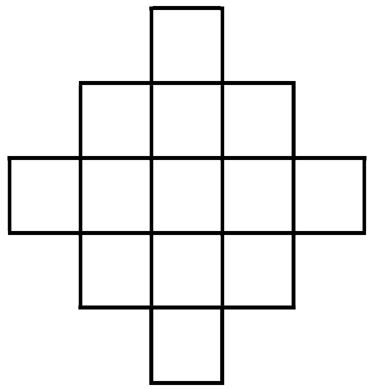
3. Бројеве 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41 распореди у поља (магичног) квадрата 3 х 3 тако да збир бројева у сваком реду, колони и дијагонали буде једнак.

Како је централни број магичног квадрата једнак 33, то је карактеристични број магичног квадрата једнак $3 \cdot 33 = 99$. Један од могућих распореда датих бројева је (слика лево):

39	25	35
29	33	37
31	41	27

4. Колико различитих дужи, а колико квадрата видиш на слици (десно)?

Хоризонталних дужи (на хоризонталним правама) има $1 + 6 + 15 + 15 + 6 + 1 = 44$.
Вертикалних дужи има такође 44, па се на слици може видети $44 + 44 = 88$ дужи.



Квадрата има $1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 13$ странице 1, 4 странице 2 и 1 странице 3.
Укупан број квадрата је $13 + 4 + 1 = 18$.

5. Одреди цифре A, B, C и D, ако је $ABC + CBA = DDD$ и ако једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре.
Колико има решења?

Како се збир два троцифрена броја троцифрен број, то на месту стотина, а самим тим ни на месту јединица нема преноса, тј. $C + A$ је једнако D. Како је на месту десетица збир $B + B = D$, то је D паран број.

Дакле тражени збир је 222, 444, 666 или 888.
Збир 222 отпада, јер би тада сабирци морали бити $111 + 111$, а то није могуће, јер цифре A, B и C морају бити различите.

Ако је $ABC + CBA = 444$, онда је $B + B = 4$ и $A + C = 4$, па су A и C једнаки 1 и 3.
Постоје два решења: $A = 1, B = 2, C = 3$ и $A = 3, B = 2$ и $C = 1$ и ради се осабирањима
$123 + 321 = 444$ и $321 + 123 = 444$.

Ако је $ABC + CBA = 666$, онда је $B + B = 6$, а $A + C = 6$, па су A и C једнаки 1 и 5, или 2 и 4.
Постоје четири решења: $A = 1, B = 3, C = 5$; $A = 5, B = 3, C = 1$; $A = 2, B = 3, C = 4$ и
$A = 4$, $B = 3$ и $C = 2$ и ради се о сабирањима $135 + 531 = 666$, $234 + 432 = 666$, $432 + 234 = 666$ и $531 + 135 = 666$.

Ако је $ABC + CBA = 888$, онда је $B + B = 8$, а $A + C = 8$, па су A и C једнаки 1 и 7, или 2 и 6 или 3 и 5. Постоји шест решења: $A = 1, B = 4, C = 7$; $A = 2, B = 4, C = 6$; $A = 3, B = 4, C = 5$; $A = 5, B = 4$ и $C = 3$; $A = 6, B = 4, C = 2$ и $A = 7, B = 4, C = 1$ и ради се о сабирањима
$147 + 741 = 888$, $246 + 642 = 666$, $345 + 543 = 888$, $543 + 345 = 888$, $642 + 246 = 888$ и
$741 + 147 = 888$.

Укупно има $2 + 4 + 6 = 12$ решења.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 05. 03. 2022.

4. РАЗРЕД

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

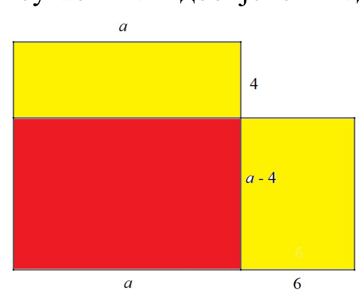
1. Збир три броја је 187. Ако се првом броју дода 5, другом одузме 5, а трећи помножи са 5 добиће се једнаки бројеви. Одреди о којим бројевима је реч?

Нека је трећи од бројева једнак x. После множења са 5 он постаје $5x$. Тада је први број $5x - 5$ и други број $5x + 5$. Следи да је $5x - 5 + 5x + 5 + x = 11x = 187$ и $x = 187 : 11$, па је $x = 17$ и $5x = 85$. Тражени бројеви су $5x - 5 = 85 - 5 = 80$, $5x + 5 = 85 + 5 = 90$ и $x = 17$.

2. Колико има четвороцифрених непарних бројева чија цифра хиљада је парна, цифра стотина мања од 7, а цифра десетица већа од 7?

За цифру хиљада има 4 кандидата – 2, 4, 6 и 8. За цифру стотина има 7 могућности – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. За цифру десетица кандидати су само 8 и 9 и за цифру јединица су предвиђене само непарне цифре 1, 3, 5, 7, 9. Укупно се добија $4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 28 \cdot 10 = 280$ бројева.

3. Ако се једна страница правоугаоника смањи за 6 cm, а а друга повећа за 4 cm, добије се квадрат чија је површина једнака површини датог правоугаоника. Одреди странице датог правоугаоника и добијеног квадрата.



Нека је страница квадрата једнака a. Тада су странице правоугаоника једнаке $a + 6$ и $a - 4$. Како је површина правоугаоника једнака површини квадрата то се жути део правоугаоника „прелива“ у жути део квадрата (а црвени део је заједнички) и ти делови имају једнаке површине. Тада је $6(a - 4) = 4a$, па је $6a - 24 = 4a$. Следи да је $6a = 4a + 24$ и $6a - 4a = 2a = 24$, па је $a = 24 : 2 = 12$ cm. Значи да је страница квадрата 12 cm, а странице правоугаоника су $a + 6 = 18$ cm и $a - 4 = 8$ cm.

4. Правило је да се у једој улици куће са леве стране улице нумеришу непарним, а куће са десне стране улице нумеришу парним бројевима. Ако се куће у тој улици нумеришу у једном правцу Ленина кућа ће имати кућни број 37. Ако се куће у тој улици нумеришу у супротном правцу Ленина кућа ће имати кућни број 68. Колико кућа има у Лениној улици?

Ако Ленина кућа у једном правцу има кућни број 37, то значи да су претходно нумерисане куће бројевима 1, 3, 5, ... , 33, 35 и има 18 кућа (пре Ленине). Ако се куће нумеришу у супротном смеру, онда су бројеви кућа 2, 4, 6, ... , 66, 68 и има их 68 : 2 = 34 (укључујући и Ленину кућу. Следи да у Лениној улици има 18 + 34 = 52 куће.
Може и 18 + 33 + 1 (Ленина кућа) = 52 куће.

5. Дат је бројевни ребус ТРИ + ТРИ = ШЕСТ у коме једнаким словима одговарају једнака слова и различитим словима одговарају различите цифре. Колико решења има дати бројевни ребус?

Како је на месту јединица И + И = Т, то је Т парна цифра.
Како је на месту хиљада слово Ш које је једнако 1, то у збиру Т + Т постоји пренос, што значи да је Т ≥ 5. Значи да је Т = 6 или Т = 8.

Ако је Т = 6, онда је 6РИ + 6РИ = 1ЕС6, па је И = 3 или И = 8.

Ако је И = 3, онда је 6Р3 + 6Р3 = 1ЕС6. Р не може бити 0 (јер би тада и С било 0), не може бити 1 (јер је Ш = 1) и не може бити 3 (јер би тада С било 6) и не може бити 6 (јер је Р = 6). Тада нису могућа ни сабирања: 623 + 623 = 1246 (не долази у обзир јер је Е = Р); 653 + 653 = 1306, 673 + 673 = 1346, 683 + 683 = 1366, 693 + 693 = 1386 (јер би тада Е било једнако са И једнако 3). Једино могуће сабирање је 643 + 643 = 1286

Ако је И = 8, онда је 6Р8 + 6Р8 = 1ЕС6. Р не може бити 0 (јер би тада и С било 1), не може бити 1 (јер је Ш = 1), не може бити 6 (јер је Т = 6).
Тада нису могућа ни сабирања: 628 + 628 = 1256 (не долази у обзир јер је Е = Р);
658 + 658 = 1316 (јер је Ш = С), 688 + 688 (јер је Р = И), 699 + 699 = 1398 (јер је Р = С)
Ако је Р = 3, онда је 638 + 638 = 1276; ако је Р = 4, онда је 648 + 648 = 1296; ако је Р = 7, онда је 678 + 678 = 1356;

За Т = 6 могуће сабирања су 643 + 643 = 1286, 638 + 638 = 1276; 648 + 648 = 1296 и 678 + 678 = 1356.

Сличним разматрањем за Т = 8, односно И = 4 и И = 9 се добијају и остала решења:
854 + 854 = 1708, 864 + 864 = 1728, 829 + 829 = 1658, 839 + 839 = 1678, 869 + 869 = 1738,

Укупно има 4 + 5 = 9 решења.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“
ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

5. РАЗРЕД

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

1. Збир четири броја је 256. Ако се првом дода 7, другом одузме 7, трећи помножи са 7 и четврти подели са 7, добијају се једнаки бројеви. О којим бројевима је реч?

Нека је трећи број једнак x. Тада је су после извођења описаних операција сви бројеви једнаки 7x. Први број је тада 7x – 7, други 7x + 7, трећи број x, а четврти $7 \cdot 7x = 49x$.
Следи да је $7x – 5 + 7x + 5 + x + 49x = 64x = 256$, па је $x = 256 : 64 = 4$ и $7x = 28$,
Тражени бројеви су $7x – 7 = 28 – 1 = 21$; $7x + 7 = 28 + 7 = 35$; $x = 4$ и $7x \cdot 7 = 196$.
Сабирањем $21 + 35 + 4 + 196$ добија се $56 + 200 = 256$.

2. Дат је разломак $\frac{p}{q}$ (p и q су природни бројеви и $p < q$). Напиши низ од најмањег до највећег разломка облика $\frac{p}{q}$, ако је $p \cdot q = 180$.

Тражени разломци су $\frac{1}{180}, \frac{2}{90}, \frac{3}{60}, \frac{4}{45}, \frac{5}{36}, \frac{6}{30}, \frac{9}{20}, \frac{10}{18}, \frac{12}{15}$.

Њихов поредак је $\frac{1}{180} < \frac{2}{90} < \frac{3}{60} < \frac{4}{45} < \frac{5}{36} < \frac{6}{30} < \frac{9}{20} < \frac{10}{18} < \frac{12}{15}$.

3. Збир угла α, угла суплементног са α и угла комплементног са α је 230°.
Одреди угао α.

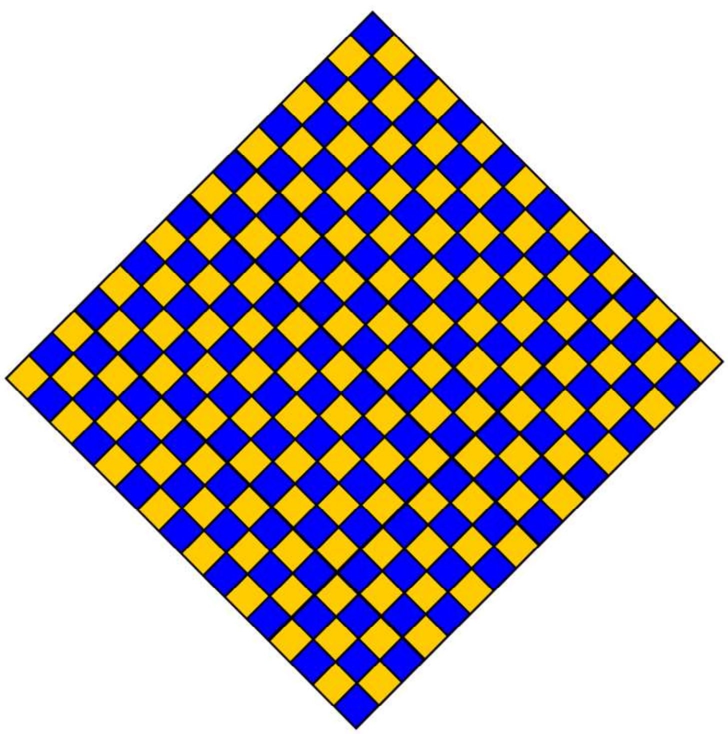
За угао α суплементан је угао $180° – \alpha$, а комплементан је угао $90° – \alpha$. Из услова задатка је $\alpha + 180° – \alpha + 90° – \alpha = 230°$. Следи да је $270° – \alpha = 230°$ и $\alpha = 270° – 230° = 40°$.

4. Одреди све просте бројеве x и y такве да је $x + y = 84$. Колико решења има дата једначина x?

Прости бројеви x и y су непарни, па су могућа решења: $x = 5$, $y = 79$; $x = 11$, $y = 73$; $x = 13$, $y = 71$; $x = 17$, $y = 67$; $x = 23$, $y = 61$; $x = 31$, $y = 53$; $x = 37$, $y = 47$, $x = 41$, $y = 43$. Набројано је 8 решења, за $x < y$. За $x > y$ има још 8 решења, што је укупно 16 решења.

5. Дат је скуп $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$. Анка је написала све подскупове скупа S који имају два елемента. Бранка је сабрала све бројеве у подскуповима које је написала Анка. Колико подскупова је написала Анка? Колики је збир бројева који је израчунала Бранка?

Први елеменат двоелементног подскупа се може изабрати на 10, а други на 9 начина, па је укупан број двоелементних скупова $10 \cdot 9 : 2$ (јер је подскуп $\{x, y\}$ исто што и подскуп $\{y, x\}$. То значи да је Анка написала 45 двоелементних подскупова. У 45 подскупова има 90 бројева и сваки од 10 елемента скупа S се комбинује са сваким од преосталих 9 бројева. То значи да је сваки од 10 бројева коришћен 9 пута. На пример: $\{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \ldots \{3, 9\}, \{3, 10\}$. Према томе Бранка је израчунала збир $9 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9 + 10) = 9 \cdot 55 = 495$.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“
ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

6. РАЗРЕД

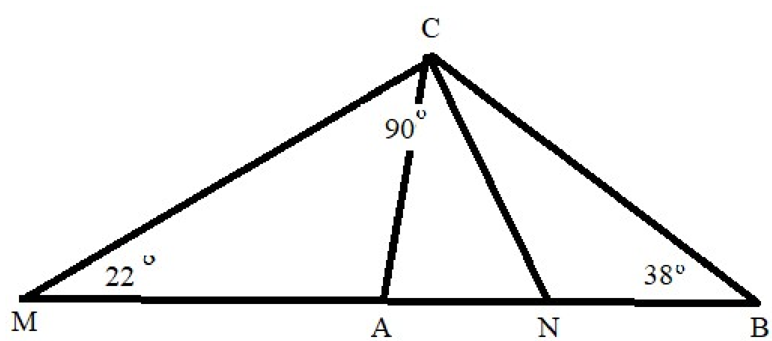
ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

1. Збир четири цела броја је – 9, а њихов производ је – 30. Одреди збир апсолутних вредности тих бројева.

Како је $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 30 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6$ и како је негативан производ могућ само ако је један број негативан или су три броја негативна, то је збир – 9 могућ само у случајевима $1 + (-2) + (-3) + (-5)$ и $3 + (-1) + (-1) + (-10)$. Збир апсолутних вредности тражених бројева је $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ или $3 + 1 + 1 + 10 = 15$.

2. Дат је троугао ABC у коме је угао $\angle ABC = 38°$. Симетрала спољашњег угла код темена C пресеца праву AB (продужетак дужи AB) у тачки M, тако да је $\angle AMC = 22°$. Одреди углове троугла ABC.

Како се симетрала унутрашњег и симетрала спољашњег угла троугла секу под углом од 90°, то је $\angle MCN = 90°$ (види слику). Тада је $\angle MCB = \angle MCN + \angle NCB = 90° + \gamma/2$. Из троугла MCB следи да је $\angle MCN = 180° - \angle CMB - \angle MBC = 180° - 22° - 38° = 120°$. Како је $90° + \gamma/2 = 120°$, то је $\gamma/2 = 30°$, па је $\gamma = 60°$. Тада је $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 38° - 60° = 82°$.

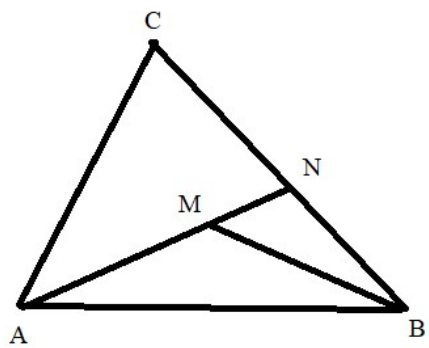


3. Дата су 2022 различита проста броја? Докажи да се бар 505 датих простих бројева завршавају истом цифром.

Прости бројеви се завршавају цифрама 1, 2, 3, 5, 7 и 9.
Распоредимо дате просте бројеве у 6 класа тако што ће у свакој класи бити сви прости бројеви који се завршавају истом цифром. У класама 2 и 5 може бити највише по један број, јер су сви остали бројеви који се завршавају цифрама 2 и 5 сложени.
Када се преосталих 2022 – 2 = 2020 бројева расподели у 4 класе, онда у једној класи, на основу Дирихлеовог принципа има бар 2020 : 4 = 505 простих бројева.

4. У унутрашњој области троугла ABC дата је тачка M. Докажи да је:
а) $\angle AMB > \angle ACB$; б) $AM + MB < AC + BC$.

а) Ако се искористи чињеница да је спољашњи угао троугла једнак збиру два унутрашња несуседна угла троугла, онда је:
$\angle AMB = \angle MNB + \angle MBN = \angle ACN + \angle CAN + \angle MBN > \angle ACN = \angle ACB$ (види слику).



б) Ако се искористи теорема о односу страница троугла, конкретно да је збир две странице увек већи од треће странице добија се:
$AC + BC = AC + CN + NB > AN + NB = AM + MN + NB > AM + BM$.

5. Колико решења има једначина $p + 3q + 5r = 2022$, ако су бројеви p, q и r прости бројеви?

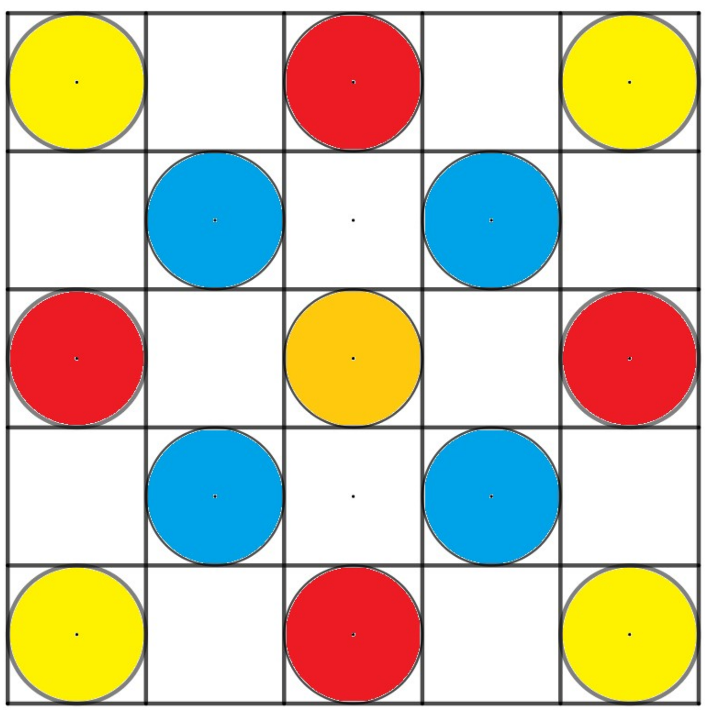
Ако су p, q и r непарни прости бројеви , онда је $p + 3q + 5r$ непаран број и проблем нема решења. Дакле, један од простих бројева p, q и r је паран.

1) Нека је $p = 2$. Онда је $3q + 5r = 2020$. Како су $5r$ и 2020 дељиви са 5, то мора бити и q. Једини такав број је $q = 5$. Тада је $5r = 2020 – 15 = 2005$, па је $r = 2005 : 5 = 401$, што јесте прост број.

2) Ако је $q = 2$, онда је $p + 6 + 5r = 2022$, па је $p + 5r = 2016$. Добијена једначина има много (али не и бесконачно много) решења облика $\frac{2016-p}{5} = \frac{2015+1-p}{5} = 503 + \frac{1-p}{5}$, јер кад год је $p = 10к + 1$ прост број, r ће бити природан број. Треба видети који од тако добијених бројева је прост. На пример за $p = 11$, добија се да је $r = (2016 – 11) : 5 = 2005 : 5 = 401$, а то је прост број.

3) Ако је $r = 2$, онда је $p + 3r + 10 = 2022$, па је $p + 3q = 2012$. Добијена једначина има много (али не и бесконачно много) решења облика $\frac{2012 - p}{3} = \frac{2010 + 2 - p}{3} = 670 + \frac{2 - p}{3}$. Ако је $p = 3к + 2$, q ће бити природан број и треба видети који од тако добијених бројева је прост.
На пример за $p = 11$, добија се да је $31 + 3q + 10 = 2022$, онда је $3q = 2022 - 41 = 1983$ и $q = 661$, а то је прост број.

Напомена: Задатак је до пола сата пред почетак такмичења гласио: Постоје ли прости бројеви p, q и r такви да је $p + 3q + 5r = 2022$?
Али је непажњом састављача добио форму која се појавила на пробном такмичењу и која доказује да проблем има више решења, која се изгледа могу пребројати само уз помоћ рачунара.
Због тога се такмичарима извињавамо, јер је аналитички пребројати решења доста тешко, а вероватно су изгубили много времена покушавајући да нађу неку идеју за пребројавање..



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 05. 03. 2022.

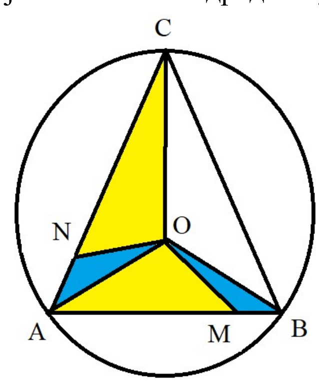
7. РАЗРЕД

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

1. Доказати да је број $6^{2022} + 7^{2022} + 8^{2022} + 9^{2022}$ дељив са 10.

Број 6^{2022} се завршава цифром 6.
Број $7^4 = 49 \cdot 49$ се завршава цифром 1, па се и број $7^{2020} = (7^4)^{505}$ завршава цифром 1, а број $7^{2022} = 7^{2020} \cdot 7^2$ се завршава цифром 9.
Број $8^4 = 64 \cdot 64$ се завршава цифром 6, па се и број $8^{2020} = (8^4)^{505}$ завршава цифром 6, а број $8^{2022} = 8^{2020} \cdot 8^2$ се завршава цифром 4.
Број $9^2 = 81$ се завршава цифром 1, па се и број $9^{2022} = (9^2)^{1011}$ завршава цифром 1.
Збир бројева $6^{2020} + 7^{2022} + 8^{2022} + 9^{2022}$ се завршава цифром нула $(6 + 9 + 4 + 1 = 20)$, па је дељив са 10.

2. Дат је једнакостранични троугао ABC и тачка O која је центар круга описаног око троугла ABC. На страници AB дата је тачка M, а на страници AC тачка N, тако да је AM + AN = AB. Доказати да је OM = ON и одредити угао ∠MON.



Нека је AB = BC = CA = a и нека је MB = x, онда је AM = a - x. Тада је AN = x и NC = $a - x$.
Троуглови AON и BON су подударни (AN = BM = x, ∠NAO = ∠MBO = 30° и AO = CO као полупречници круга). Из подударности је OM = OB и ∠NOA = ∠MOB.
Тада је ∠MON = ∠AOM + ∠NOA = ∠AOM + ∠MOB = ∠AOB = 120°.

3. Дати су природни бројеви $x = 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 6^5$ и $y = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2$. Колико делилаца има број $x + y$?

Из услова задатка је $x = 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 6^5 = 3^2 \cdot 2^6 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 3^5 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^4$ и
$y = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2 = 3^5 \cdot 2^8 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3$.
Тада је $x + y = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^4 + 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 (2 \cdot 5 + 1) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 11$.
Добијени број x + y има (10 + 1)(7 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 11 · 8 · 4 · 2 = 88 · 8 = 704 делиоца.

4. Висине троугла ABC су 12, 15 и 20. Одреди полупречник круга уписаног у дати троугао.

Прво решење: Полупречник круга уписаног у троугао је $r = \dfrac{P}{s} = \dfrac{2P}{a+b+c}$. Како је

$a = \dfrac{2P}{h_a} = \dfrac{2P}{12} = \dfrac{P}{6}$, $b = \dfrac{2P}{h_b} = \dfrac{2P}{15}$ и $c = \dfrac{2P}{h_c} = \dfrac{2P}{20} = \dfrac{P}{10}$ то је $a + b + c = \dfrac{2P}{5}$. Тада је

$$r = \frac{2P}{\frac{2P}{5}} = 5 .$$

Друго решење: Из $b^2 + c^2 = \left(\dfrac{2P}{15}\right)^2 + \left(\dfrac{P}{10}\right)^2 = \dfrac{16P^2 + 9P^2}{4 \cdot 9 \cdot 25} = \dfrac{25P^2}{36 \cdot 25} = \left(\dfrac{P}{6}\right)^2 = a^2$ следи да је троугао правоугли, па су две веће висине троугла истовремено и катете. Тада је хипотенуза једнака 25, па је па је $r = \dfrac{b+c-a}{2} = \dfrac{15+20-25}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$.

Треће решење: Из Херонове формуле се добије да је P = 150, па је тада $a = 25$, $b = 20$, $c = 15$. Даље израчунавање дато је у другом решењу.

5. Природни бројеви 2, 5, 5, *m, n*, 11 поређани су у низ тако да сваки следећи број није мањи од претходног. Одреди бројеве *m* и *n* тако да аритметичка средина добијених 6 бројева буде цео број.

Из услова задатка је $5 \le m \le n \le 11$. Тада је $\dfrac{2+5+5+m+n+11}{6} = \dfrac{23+m+n}{6} = к$

Како је $10 \le m + n \le 22$, то је $23 + 10 = 33 \le m + n + 23 = 6к \le 45 = 23 + 22$, то је
$\dfrac{33}{6} \le к \le \dfrac{45}{6}$. Тада је $6 \le к \le 7$.
Ако је $к = 6$, онда је $23 + m + n = 36$, па је $m + n = 13$ и добијају се два решења:
$m = 5$, $n = 8$ и $m = 6$, $n = 7$.
Ако је $к = 7$, онда је $23 + m + n = 42$, па је $m + n = 19$ и због $5 \le m \le n \le 11$ добијају се још два решења: $m = 8$, $n = 11$ и $m = 9$, $n = 10$.

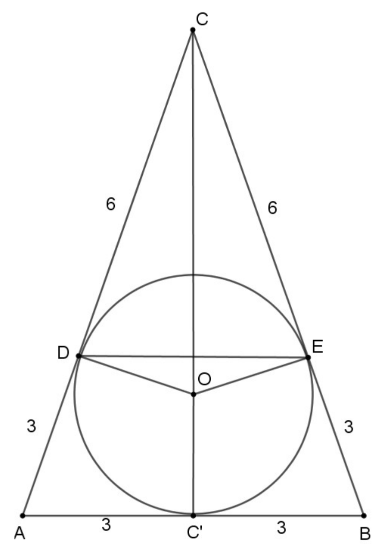
ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ ШКОЛСКА 2021/22

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
05. 03. 2022.

8. РАЗРЕД

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

1. Дат је једнакокраки троугао ABC у коме је AC = BC = 9 cm и AB = 6 cm. Кружница уписана у троугао ABC додирује краке AC и BC у тачкама D и E. Одреди дужину дужи DE.



Дужи AD и BE као тангентне дужи једнаке су дужима AC' и BC' и једнаке 3 cm. Тада су дужу CD и CE једнаке 9 – 3 = 6 cm.

Троуглови ABC и CDE су слични (имају све одговарајуће углове једнаке).

Из сличности је AC : AB = CD : DE, тј. 9 : 6 = 6 : DE. Следи да је 9 · DE = 36, па је DE = 4 cm.

2. Одреди скуп решења неједначине $||x-5|-6| < 2x+8$.

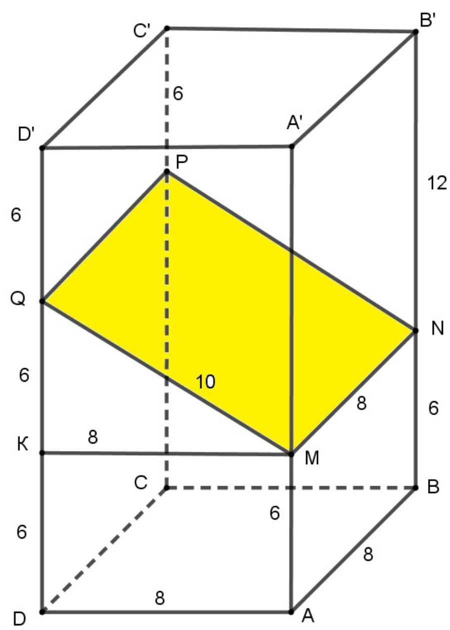
Ако је $x < 5$ неједначина је еквивалентна са $|5-x-6| = |-x-1| < 2x+8$.
Ако је $x \geq 5$ неједначина је еквивалентна са $|x-5-6| = |x-11| < 2x+8$.

1.1. Ако је $x < 5$ и $-x-1 > 0$, тј. ако је $x < -1$, неједначина постаје $-x-1 < 2x+8$.
Тада је $3x > -9$ и $x > -3$. Скуп решења у том интервалу је $S_1 = (-3, -1)$.
1.2. Ако је $x < 5$ и $-x-1 \leq 0$, тј. ако је $x \geq -1$, неједначина постаје $x+1 < 2x+8$.
Тада је $1-8 < 2x-x$, тј. $x > -7$. Скуп решења у том интервалу је $S_2 = [-1, 5)$.

2.1. Ако је $x \geq 5$ и $x - 11 < 0$, тј. ако је $x < 11$, неједначина постаје $11 - x < 2x + 8$.
Тада је $3x > 3$ и $x > 1$. Скуп решења у том интервалу је $S_3 = [5, 11)$.
2.2. Ако је $x \geq 5$ и $x - 11 \geq 0$, тј. ако је $x \geq 11$, неједначина постаје $x - 11 < 2x + 8$.
Тада је $-11 - 8 < 2x - x$ и $x > -19$. Скуп решења у том интервалу је $S_4 = [11, \infty)$.

Скуп решења неједначине $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = (-3, -1) \cup [-1, 5) \cup [5, 11) \cup [11, \infty) =$
$(-3, \infty)$.

3. Дата је правилна четворострана призма ABCDA’B’C’D’ чија је основна ивица 8 cm и висина 18 cm. На бочним ивицама AA' и BB' дате су тачке M и N, тако да је AM = BN = 6 cm. Раван π садржи дуж MN и дели призму на два полиедра једнаких запремина. Одредити површине добијених полиедара.



Пресек равни и призме је правоугаоник MNPQ који призму дели на два подударна полиедра (види слику).
Полиедарску површ чине квадрат ABCD, правоиугаоници ABNM, MNPQ и CDQP и два подударна трапеза AMQD и BNPC.
Из правоуглог троугла MQK дуж MQ = 10 cm.
Површина полиедра је:
$P = 8 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 12 + 2 \cdot (6 + 12) \cdot 8 : 2 =$
$64 + 48 + 80 + 96 + 144 = 332 \text{ cm}^2$.

4. Конвексан многоугао M има m страница, а конвексан многоугао N има n страница. Одреди m и n, ако многоугао M има 36 дијагонала више од многоугла N.

Ако многоугао M има m страница, а многоугао N n страница, онда је $m > n > 2$ и
$\frac{m(m-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 36$. Тада је $m^2 - 3m - n^2 + 3n = 72$, тј. $m^2 - n^2 - 3(m - n) = 72$.
Следи да је $(m - n)(m + n) - 3(m - n) = (m - n)(m + n - 3) = 72$.

Бројеви $m - n$ и $m + n - 3$ су различите парности и $m + n - 3 > m - n$.
У обзир долазе случајеви: $m + n - 3 = 72$ и $m - n = 1$; $m + n - 3 = 24$ и $m - n = 3$;
$m + n - 3 = 9$ и $m - n = 8$.

Тражена решења су: $m = 38, n = 37$; $m = 15, n = 12$, $m = 10, n = 2$.

Последње решење не одговара условима задатка, јер не постоји многоугао са 2 странице.

5. Дата је једначина $x \cdot y^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 9 \cdot 10$. Колико решења у скупу целих бројева има дата једначина?

Једначина $x \cdot y^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ ће у скупу природних бројева имати онолико решења колико се од броја $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ може направити потпуних квадрата. Како је $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2$ то значи да је y једнако броју делилаца броја $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, а то је $(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$. То значи да у скупу целих бројева једначина има 60 решења, јер ако је y решење, онда је и $-y$ решење дате једначине.