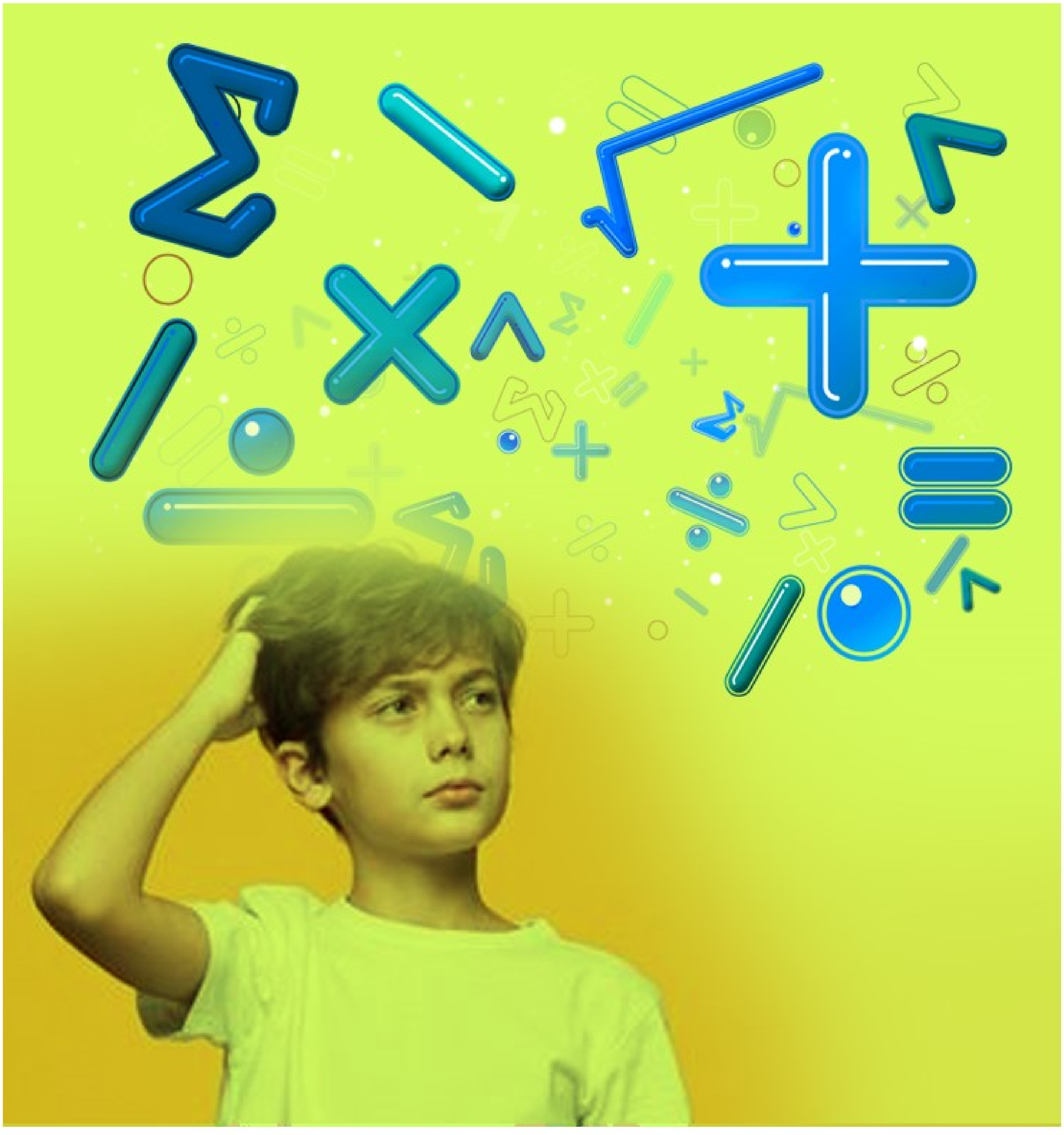
ЕЛЕКТРОНСКИ ЧАСОПИС ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ

# ДИОФАНТ



ГОДИНА 2, БРОЈ 2 - ВАЉЕВО, ОКТОБАР 2022.

**ДИОФАНТ**

**Електронски часопис за**
**додатну наставу математике**

**Година 2.**

**Број 2**

**Ваљево, октобар 2022.**

**Уредник часописа:**

**др Војислав Андрић (voja.andric@gmail.com)**

**Издавач:**

**Математички клуб „Диофант“ Ваљево,**

**14000 Ваљево, Поп Лукина 38**

**Телефон  065 291 22 00;  e – mail:  diofant2020@gmail.com**

**Све прилоге, предлоге и примедбе слати путем електронских адреса:**
**diofant2020@gmail.com  и  voja.andric@gmail.com**

**Часопис је бесплатан**

**Излази повремено и по потреби**

**ISSN (Online) 2812-9520**

## САДРЖАЈ



# ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

## 3. РАЗРЕД

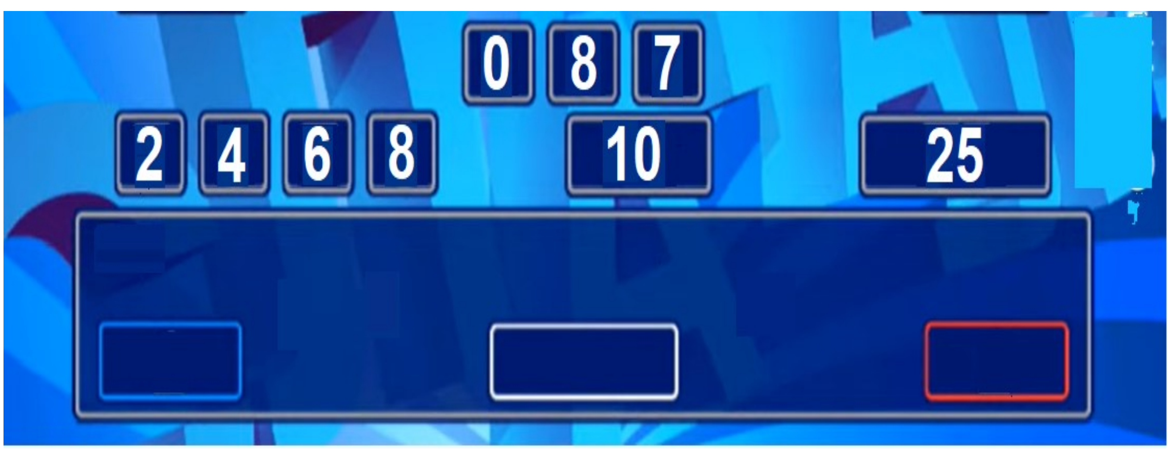
## ТЕМА 301: ЗАНИМЉИВИ ИЗРАЗИ

Изразе ћемо записивати коришћењем симбола:

- за цифре: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 9, 0;
- за рачунске операције: +, - , · , : ;
- за заграде: ( ).

У општем случају није дозвољено ′′слепљивање″ цифара тј. да се од цифара 7, 7, 7 направи број 777. Ако је могуће ′′слепљивање″ цифара, онда ћемо то посебно нагласити.

1. Решити дати проблем из емисије „Бројке и слова“.




2. Користећи цифре 1, 2, 3 и 4 и симболе рачунских операција и заграде, написати броје-вни израз чија је вредност једнака 17, ако се свака цифра може користити тачно једном.
3. Користећи цифре, заграде и симболе рачунских операција написати:
   а) број 0 помоћу 3 седмице
   б) број 1 помоћу 3 двојке
   в) број 2 помоћу 3 петице

4. Користећи 4 четворке, симболе рачунских операција и заграде, напиши бројевне изразе чија су бројевне вредности сви бројеви од 0 до 9.
5. Колико најмање четворки треба употребити да би се добио израз чија је вредност 10:
   а) ако није дозвољено ''слепљивање'' цифара?
   б) ако је дозвољено ''слепљивање'' цифара?
6. Помоћу цифара, заграда и симбола рачунских операција написати:
   а) број 100 помоћу 4 деветке;
   б) број 100 помоћу 5 јединица;
   в) број 100 помоћу 6 четворки.
   Дозвољено је ''слепљивање'' цифара.
7. Помоћу цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, заграда и симбола рачунских операција написати бројевни израз чија је вредност 10, тако што ћеш сваку цифру употребити тачно једном. Није дозвољено ''слепљивање'' цифара.
8. Постоје ли четири броја чији збир је једнак њиховом производу и једнак 8?
9. Не мењајући редослед бројева 5 4 3 2 1 и користећи симболе рачунских операција и заграде, напиши на бар пет различитих начина бројевне изразе чија је вредност 3. Слепљивање цифара није дозвољено.
10. Дати су бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Не мењајући њихов редослед направи бројни израз чија је вредност 100.
11. Распореди цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 сваку само по једном тако да се добије једнакост $** \cdot * - ** : * + * = 38$.
12. Између неких од цифара у низу 1 2 3 4 5 6 7 стави знак плус тако да вредност добијеног израза буде 100, ако је могуће слепљивање цифара, али није могуће мењање редоследа цифара.
13. Саставити три различита израза, тако што се између бројева 2 4 6 8 10 = 9 9 (којима се не сме мењати редослед) уметну знаци рачунских операција и заграда, тако да добијена једнакост буде тачна.
14. У дате квадратиће уписати сваку од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да све једнакости буду тачне. $\square + \square = \square - \square = \square \cdot \square = \square\square : \square$.

## ДОМАЋИ ЗАДАТАК

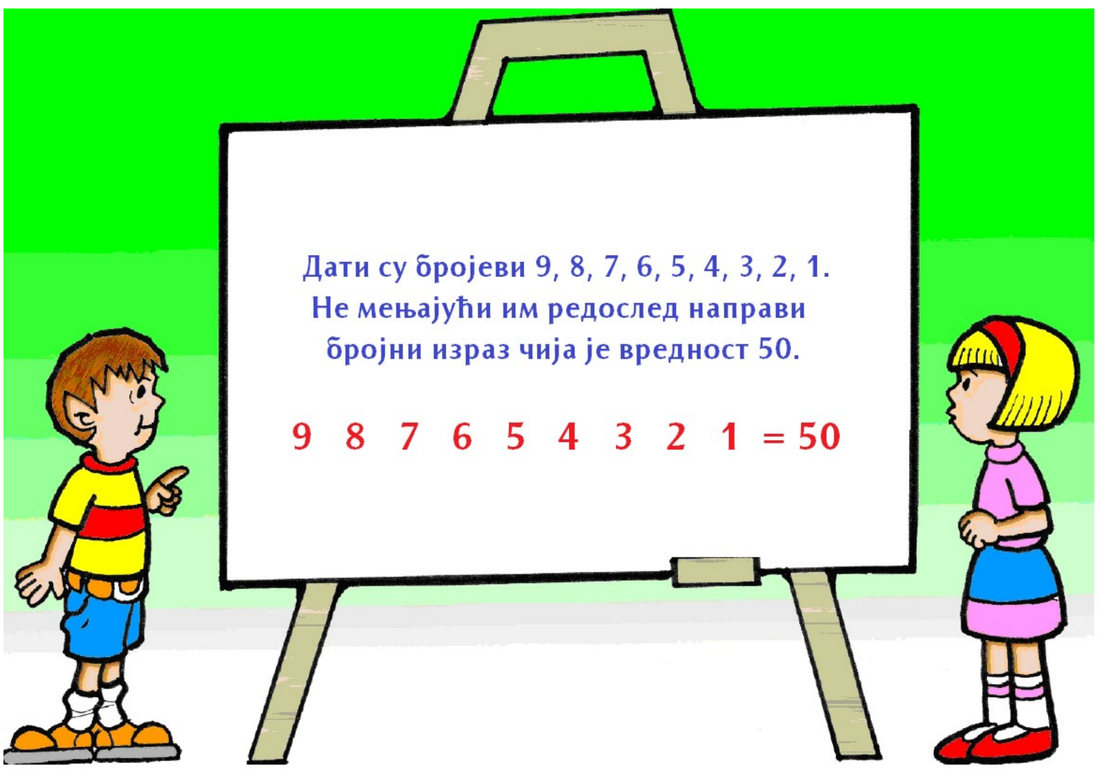
1) Користећи цифре, заграде и симболе рачунских операција написати све бројеве од 0 до 16 помоћу 5 двојки. „Слепљивање“ цифара није дозвољено.

2) Дат је израз: 1 * 2 * 3 * 4 * 5. Не мењајући редослед датих цифара, уместо звездица ставити симболе рачунских операција и уз помоћ заграда написати бројевне изразе чија је вредност: а) 19; б) 26; в) 50.

3) Дати су бројеви 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Не мењајући им редослед направи бројни израз чија је вредност 50.

4) Збир и производ неколико природних бројева износи 14. Одредити о којим бројевима је реч ?

5) Дат је израз: 36 * 35 * 34 * ... * 3 * 2 * 1. Уместо звездица постави знаке + или – , тако да добијени израз има најмању, односну највећу вредност. Одреди те вредности.



# ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

## 4. РАЗРЕД

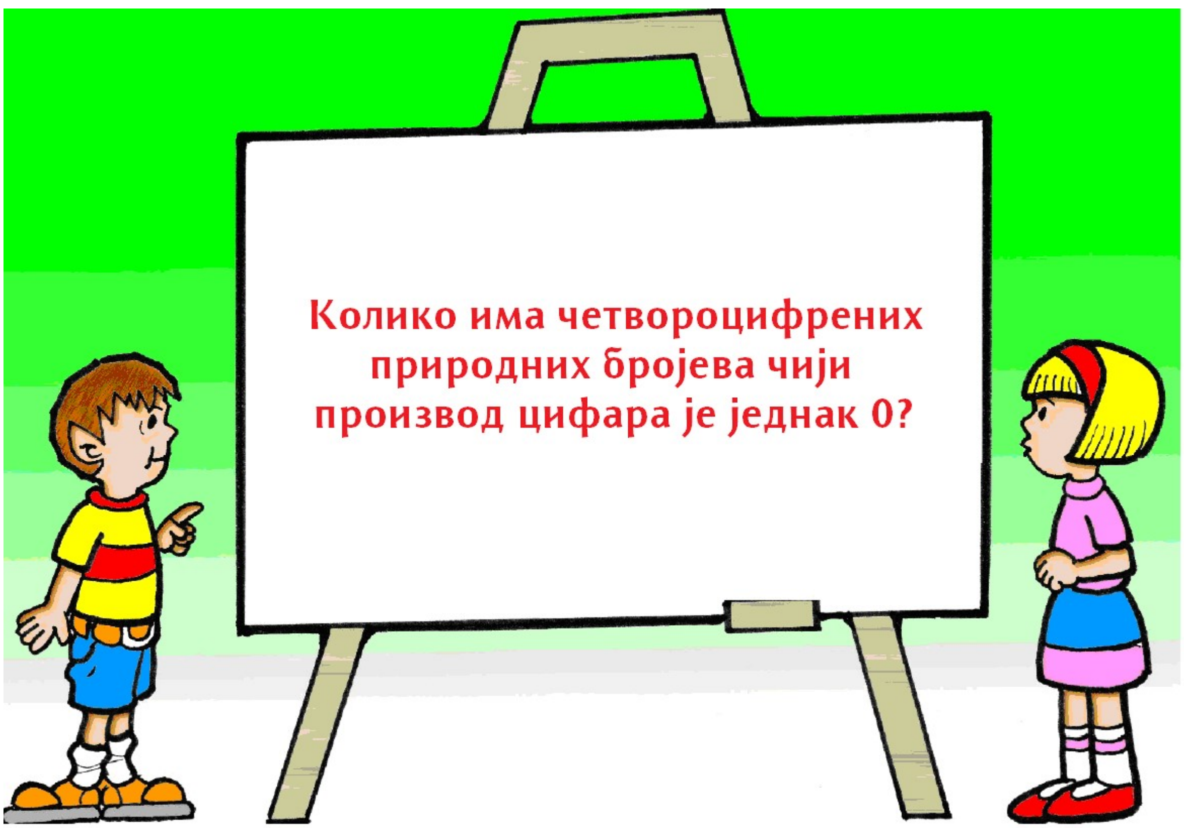
## ТЕМА 401: ЗБИР И ПРОИЗВОД ЦИФАРА ПРИРОДНОГ БРОЈА

1. Колики је збир, а колики производ цифара природног броја 123 456?
2. Може ли: а) збир; б) производ цифара природног броја бити 0?
3. Колико има двоцифрених бројева чији је збир цифара једнак 11?
4. Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара једнак 8?
5. Може ли број чији је збир цифара 8 бити мањи од броја чији је производ цифара 4?
6. Може ли број чији је збир цифара 8 бити већи од броја чији је производ цифара 4?
7. Колико има четвороцифрених бројева чији је збир цифара 4?
8. Колико има петоцифрених бројева чији је производ цифара 5?
9. Може ли број чији је збир цифара 6 бити већи од броја чији је производ цифара 12?
10. Може ли број чији је збир цифара 6 бити мањи од броја чији је производ цифара 12?
11. Напиши најмањи и највећи шестоцифрен број чији је збир цифара 6.
12. Постоји ли природан број код кога је производ цифара једнак 91.
13. Одреди најмањи и највећи седмоцифрен број чији је производ цифара 7.
14. Може ли: а) збир; б) производ цифара петоцифреног природног броја бити 47?
15. Постоји ли седмоцифрен природни број чији је: а) збир; б) производ цифара једнак 5?
16. Колико има троцифрених бројева чији је збир цифара већи од 24?

17. Да ли је више четвороцифрених бројева чији је збир цифара 6, или је више четвороцифрених бројева чији је производ цифара 6?
18. Одреди најмањи и највећи петоцифрен број чији је производ цифара једнак 30.
19. Колико има четвороцифрених бројева чији је производ цифара већи од 9999?
20. Напиши најмањи и највећи број чије су све цифре различите, ако је збир његових цифара једнак 45.
21. Напиши најмањи и највећи број чије су све цифре различите, ако је производ његових цифара једнак 840.
22. Да ли постоје бројеви x и y такви да је број x већи од броја y, а збир цифара броја x мањи од збира цифара броја y?
23. Да ли постоје бројеви x и y такви да је број x мањи од броја y, а производ цифара броја x већи од производа броја y?
24. Колико има природних бројева мањих од 10 000 код којих је збир цифара једнак 37 ?
25. Да ли постоје четвороцифрени природни бројеви чији је производ цифара једнак 400?
26. Колико има природних бројева мањих од 100 000 код којих је збир цифара једнак 37 ?
27. Да ли постоје четвороцифрени природни бројеви чији је производ цифара једнак:
    а) 400; б) 600; в) 800; г) 1000; д) 2000 ?
28. Колико четвороцифрених природних бројева има производ цифара већи од 6000 ?
29. Одредити најмањи и највећи петоцифрен број код кога је производ цифара једнак 6.
30. Постоји ли петоцифрен природан број у чијем декадном запису је производ парних цифара једнак производу непарних цифара ?
31. * Одреди најмањи и највећи природан број чији је збир цифара 33.
32. * Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара већи од 500?
33. * Одредити најмањи и највећи шестоцифрени природан број код кога је збир парних цифара једнак збиру непарних цифара.
34. * Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара мањи од 3?
35. * Напиши све троцифрене бројеве чији је збир цифара једнак њиховом производу?

## ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Напиши све петоцифрене природне бројеве чији је збир цифара већи од 42?
2) Колико има четвороцифрених бројева чији је производ цифара једнак 8.
3) Колико има троцифрених, а колико четвороцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 4?
4) Колико има природних бројева мањих од 1000 код којих је производ цифара једнак 64 ?
5) Колико има природних бројева чији је и збир и производ цифара једнак 6?



# ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
# „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
# ШКОЛСКА 2022/23

## 5. РАЗРЕД

## ТЕМА 501
## ДЕЉИВОСТ ПРИРОДНИХ  БРОЈЕВА

1. Постоји ли природан број чији је производ цифара 26?
2. Да ли је број 1234567890 дељив са 90?
3. Да ли је број 626262 ... 6262 дељив са 8?
4. Који је најмањи природан број који има тачно 5 делилаца (рачунајући јединицу и самог себе)?
5. Да ли је тално врђење: Ако је збир природних бројева *т* и *п* дељив са 3, онда је и њихова разлика дељива са 3?
6. Одреди најмањи и највећи четвороцифрени број који је дељив са 2, 5 и 9.
7. Одреди збир свих природних бројева који при дељењу са 7 дају остатак који је једнак количнику.
8. Одреди најмањи природан број који је дељив са 27 и чији збир цифара је 27?
9. Низ 60, 30, 20, 15 … је опадајући. Одреди правило по коме се ређају чланови низа и напиши следећа три члана низа.
10. Прва математичка година је била дељива са 1, друга са 2 ... седамнаеста са 17, а осамнаеста по реду математичка година је била 2016. година (која је дељива са 18). Математичка година је најближа година која је дељива својим редним бројем. Када је била 17. математичка година, а када ће бити 19. математичка година?
11. Каубој Бил је ушао у салун и наручио један виски који кошта 3 долара и 6 сендвича. Бармен му је наруџбину наплатио 11 долара и 90 центи (1 долар има 100 центи). На то је Бил извадио револвер и наредио бармену да поштено направи рачун. Како је каубој Бил знао да је бармен (случајно или намерно) погрешио у извођењу рачуна?
12. Дата су четири тврђења: А: “Број *а* је дељив са 12”; Б: “Број *а* је дељив са 24”;
    В: “Број *а* је дељив са 2”; Г: “Број *а* је дељив са 4”. Познато је да су од датих тврђења три тачна, а једно није. Познато је да је *а* мање од 100.
    Одреди све такве бројеве.

13. Производ два природна броја од којих ни један не садржи цифру 0, је 100 000. О којим бројевима је реч?

14. У једном кораку је могуће дати број помножити са 2 или му избрисати једну цифру. Да ли је могуће у низу таквих корака од датог природног броја 458 добити природан број 14?

15. Ако су природни бројеви x и y дељиви са 11, онда је и њихов збир дељив са 11. Докажи. Да ли важи обрнуто тврђење, тј. ако је збир бројева x и y дељив са 11, да су тада и бројеви x и y дељиви са 11?

16. Докажи да је број 444 555 666 дељив са 37.

17. За неке природне бројеве x и y важи да је $3x + 2y$ дељиво са 23. Докажи да је тада и број $49x + 48y$ дељив са 23.

18. Доказати да је збир првих хиљаду природних бројева дељив са 65,70,77.

19. Одреди све природне бројеве који су пет пута већи од своје последње цифре.

20. Одредити све троцифрене бројеве који су дељиви са 15, чији је збир цифара дељив са 15.

## ДОМАЋИ ЗАДАТАК

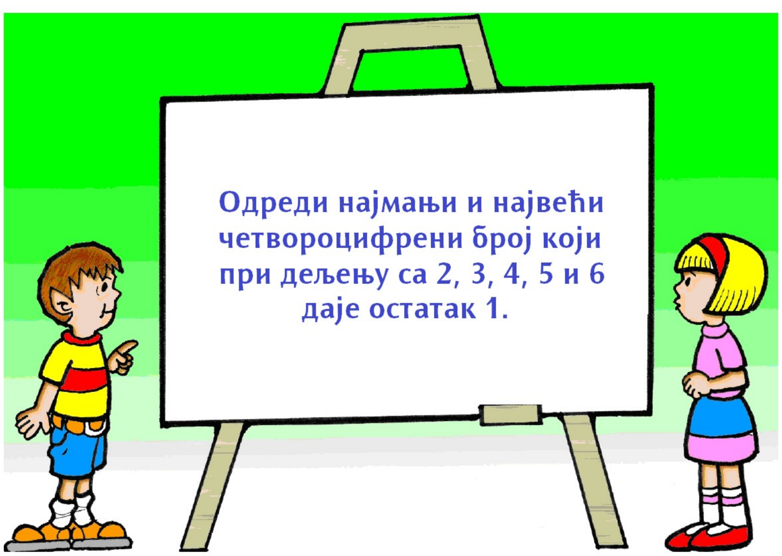
1. Одреди све природне бројеве дељиве са 8, чији је збир цифара 7, а производ цифара једнак 6.

2. Нека је $M = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Одреди збир цифара броја M.

3. Одреди најмањи седмоцифрен број који је дељив са 36, ако су све његове цифре различите.

4. Докажи да збир 4 узастопна природна броја није дељив са 4,

5. Одреди све двоцифрене бројеве који су пет пута већи од збира својих цифара.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

# 6. РАЗРЕД

# ТЕМА 601
# САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

1. Израчунај вредност израза $|a| - |-a|$.
2. Може ли збир три узастопна цела броја бити 2?
3. Колико најмање узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 101?
4. Колико највише целих узастопних бројева треба сабрати да би се добио збир 3?
5. Може ли цео број бити већи од своје апсолутне вредности?
6. Израчунај вредност израза $A = |a + 3| + |a - 3| + |a - 1|$, ако је $a = -10$.
7. За $x = -1$ и $y = -5$ израчунај вредност израза: $|x - y| + 2|y| - |x + y|$.
8. Израчуј суму: $|1 - 2| + |3 - 4| + |5 - 6| + \dots + |2019 - 2020| + |2021 - 2022|$.
9. Ако је $x = 5$ израчунати суму $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 100|$.
10. Ако је $x + y = 0$, онда је $|x| = |y|$. Докажи.
    Да ли важи обрнуто, тј. ако је $|x| = |y|$, онда је $x + y = 0$?
11. Израчунај збир десет узастопних целих бројева ако су:
    а) само четири броја позитивна;
    б) само три броја негативна.
12. Могу ли се у следећим једнакостима звездице заменити знацима + или – тако да се добију тачне једнакости:
    а) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0$;
    б) $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0$?
13. Колико је:
    а) $(-25) + (-24) + \dots + 28 + 29$ ;
    б) $(-85) + (-84) + \dots + 87 + 88$ ?

14. Упореди целе бројеве $a$ и $b$ ако је $a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 + 101$ и
$b = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + \quad + 97 - 99 + 101 - 103$.

15. Реши по $x$ следеће једначине:
а) $(-10) + (-9) + \ldots + (x-1) + x = -44 \ (x \in Z)$ ;
б) $x + (x+1) + \ldots + 17 + 18 = 51 \ (x \in Z)$ .

16. Збир 2021 узастопних целих бројева једнак је 0. О којим бројевима је реч ?

17. Збир неколико узастопних целих бројева је 25. О којим бројевима је реч?

18. У поља квадрата 3 x 3 распореди бројеве из скупа $\{-1, 0$ и $1\}$ тако да је збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали различит. Да ли је то могуће ?

19. * Колико решења у скупу целих бројева има једначина: $|x| + |y| = 3$ ?

20. * Збир 10 узастопних целих бројева је 15. Који су то бројеви?

21. * Постоје ли 2022 узастопа цела броја таква да је њихов збир једнак: а) 2021; б) 2022; в) 2023.

22. * На табли су написани бројеви $-6, -5, -4, -3, -2, -1$. Дозвољено је у једном кораку било која два броја увећати за по 1. Да ли се, после извесног броја корака, могу добити сви једнаки бројеви?

23. * Дат је скуп целих бројева $M = \{-18, -17, -16, \ldots 17, 18, 19\}$. Може ли се дати скуп $M$ поделити на неколико дисјунктних подскупова $M_1, M_2, \ldots M_к$ тако да у сваком од подскупова постоји број једнак збиру осталих елемената подскупа?

## ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Постоје ли цели бројеви $x$ и $y$ такви да је $x + y = -17$ и $x - y = 6$?

2) Упореди целе бројеве $a$ и $b$ ако је
$a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 2019 - 2020 + 2021 - 2022$ и
$b = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 2018 - 2020 + 2022$.

3) Одреди све узастопне целе бројеве тако да је њихов збир $-35$.

4) Збир три цела броја је 0, а збир њихових апсолутних вредности је 8. О којим бројевима је реч? Колико има решења?

5) На кружници је записано шест целих бројева. Сваки од њих је једнак апсолутној вредности разлике два броја који су на кружници његови претходници. Одреди записане бројеве и њихов распоред на кружници, ако је збир свих шест бројева једнак 4.

# ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

## 7. РАЗРЕД

# ТЕМА 701 КВАДРАТ РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

Квадрирање као операцију множења неког броја самим собом позната је још из четвртог разреда, када је израчунавана површина квадрата. У математици, дефиниције представљају реченице којима се уводе или ближе објашњавју нови математички појмови. На основу реченог се може прецизније одредити и појам квадрата рационалног броја, а одгова-рајућа дефиниција је: Ако је $x$ неки рационалан број онда се број $x \cdot x$ означава симболом $x^2$ и назива *квадрат рационалног броја x.*

Проблеми који следе су примери који показују само неке ситуације у којима се користе бројеви и квадрати бројева из до сада упознатих скупо-ва бројева (природни, цели и рационални бројеви).

*<u>ПРИМЕР 1.</u> Ако је r рационлан број онда је $r^2 \geq 0$. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Рационалан број може бити негативан, нула или позитиван број. 1) Ако је $r < 0$, онда је $r^2 = r \cdot r > 0$, јер је производ два негативна броја увек позитиван;

2) Ако је $r = 0$, онда је $r^2 = r \cdot r = 0 \cdot 0 = 0$;
3) Ако је $r > 0$, онда је $r^2 = r \cdot r > 0$, јер је производ два позитивна броја увек позитиван.
Према томе ако је $r$ било који рационалан број, његов квадрат је увек нене-гативан број (нула или позитиван број).

*

Метод који је коришћен код доказивања претходног проблема назива се доказивање разликовањем случајева. Метод разликовања случајева се често користи у математици код доказивања тврђења и решавања проблема.

*<u>ПРИМЕР 2.</u> Нека су x и y рационални бројеви. Да ли су тачна тврђења: а) Ако је $x = y$ онда је $x^2 = y^2$; б) Ако је $x^2 = y^2$, онда је и $x = y$?*

РЕШЕЊЕ: а) Ако су $x$ и $y$ рационални бројеви такви да је $x = y$, онда је $x^2 = x \cdot x = y \cdot y = y^2$.
б) Ово тврђење је тачно за неке вредности $x$ и $y$ (нпр. ако су оба рациона-лна броја позитивна или оба негативна), а није тачно за неке друге вредности $x$ и $y$. На пример $7^2 = (-7)^2 = 49$, а 7 и -7 нису једнаки бројеви.

*

Први део претходног проблема доказан је методом који се у математици најчешће назива директан доказ. Други део проблема је решен, раније већ помињаним, методом тражења контрапримера, јер је опет наведен бар један пример који доказује да исказана претпоставка (хипотеза) није тачна.

Пре него што се пређе на наредне примере важно је увести још један појам. Природан број *п* назива се *потпун квадрат*, ако постоји природан број *к* такав да је $п = к^2$. Тако, на пример, бројеви $9 = 3^2$, $64 = 8^2$, $121 = 11^2$ јесу потпуни квадрати, а бројеви 12, 63, 75 нису потпуни квадрати, јер се не могу приказати као квадрати неког природног броја.

*ПРИМЕР 3.* *Којим цифрама се завршавају квадрати целих бројева? Које цифре не могу бити последње цифре квадрата целих бројева?*

РЕШЕЊЕ: Цели бројеви се завршавају цифрама 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Њихови квадрати се завршавају цифрама $0 \cdot 0$, $1 \cdot 1$, ... $9 \cdot 9$, тј. цифрама 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Закључак је се квадрати целих бројева увек заврша-вају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8.

*ПРИМЕР 4.* *Постоје ли цели бројеви x и y такви да је* $x^2 + 5y = 8888$?

РЕШЕЊЕ: У решавању овог проблема користиће се већ помињани метод разликовања разликовања случајева, само што ће се за истицање свих могућих случајева користити таблица. У почетним хоризонталним пољима таблице су наведене последње цифре броја $x^2$ (из претходног примера су то цифре 0, 1, 4, 5, 6 и 9), а у почетним вертикалним пољима последња цифра броја $5y$ (то су цифре 0 и 5, јер се сваки цео број *y*, без обзира да ли је позитиван, нула или негативан, помножен са 5 завршава цифром 0 (ако је *y* паран) и цифром 5 (ако је y непаран)).

| $5y\downarrow$ | $x^2\rightarrow$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

Други корак је да се у свако поље таблице упише збир одговарајућих поља у таблици, тј. збир последњих цифара бројева $x^2$ и $5y$. Добија се таблица:

| $5y\downarrow$ | $x^2\rightarrow$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | 9 |
| 5 | | 5 | 6 | 9 | 0 | 1 | 4 |

Из таблице следи да се број $x^2 + 5y$ увек завршава цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршава цифрама 2, 3, 7 и 8. Коначно, закључак је да је дата једнакост немогућа, тј. да не постоје цели бројеви *x* и *y* такви да се број $x^2 + 5y$ завршава цифром 8.

*ПРИМЕР 5.* *Одреди најмањи природан број к, такав да је за целе бројеве а и b испуњена једнакост* $2019a^2 + 15b^2 = 222...222$ *где је број двојки једнак к* ($к \in N$).

РЕШЕЊЕ: Бројеви $a^2$ и $b^2$ завршавају се цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Тада се број $2019a^2$ завршава цифрама 0, 9, 6, 5, 4, 1, а број $15b^2$ цифрама 0 или 5. Разматрањем свих могућности јасно је да се $2019a^2 + 15b^2$ завршава цифрама 0, 9, 6, 5, 4, 1, односно 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршава цифром 2. Према томе, тражени природан број *п* не постоји.

*ПРИМЕР 6.* *Ако је n природан број, да ли је могућа једнакост:* $1 + 3 + ... + (2n - 1) = 9876543$?

РЕШЕЊЕ: Нека је $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) + (2n - 1) = S$. [1] Када се на дати збир *S* примени својство комутације и асоцијације за сабирања рационалних бројева добија се да је

[1] Појам збир се често, и у нашем језику, замењује речју сума (или summa) која има интернационално значење и због тога се најчешће као ознака за збир користи прво слово речи сума, а то је *S*.

$S = (2n - 1) + (2n - 3) + ... + 5 + 3 + 1$. Ако се претходне две релације саберу тако што ће се сабрати одговарајући сабирци из прве

и друге суме, добиће се да је $2S = 2n + 2n + ... + 2n + 2n$ , где је број таквих сабирака $n$, па је $2S = n \cdot n = 2n^2$ и $S = n^2$. Како се $n^2$ може завршавати само цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада се не завршава цифром 3, то једнакост $1 + 3 + ... + (2n - 3) + (2n - 1) = 9876543$ није могућа.

<u>ПРИМЕР 7.</u> *Ако је $p$ прост број, онда број $p^2$ има тачно три делиоца рачунајући јединицу и њега. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Како је $p$ прост број сви делиоци броја $p^2 = p \cdot p$ су 1, $p$ и $p^2$ и има их тачно три.

## ЗАДАЦИ

1. Ако је $a = -\frac{2}{3}$ израчунај вредност израза $\frac{3a^2 - 6a + 2}{a^2 + 3a + 2}$.
2. Одреди рационалне бројеве $x$ и $y$ такве да је $3x^2 = 192$ и $5y^2 = 0{,}8$?
3. Одреди збир решења једначина: $4x^2 = 49$ и $81x^2 = 16$?
4. Ако су $x$ и $y$ рационални бројеви, онда је $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$. Докажи. Да ли је и $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ ?
5. Ако је $r$ рационалан број, упореди по величини рационалне бројеве: $r^2$, $|r^2|$ и $|r|^2$.
6. Нека је $r$ рационалан број. Шта је веће: $r$ или $r^2$?
7. Који рационални бројеви испуњавају следеће неједнакости: а) $x^2 \geq 36$; б) $7y^2 < 0{,}28$?
8. Одреди збир свих решења неједначине $x^2 \leq 81$?
9. Колико има целих бројева $a$ таквих да је $25 \leq a^2 < 144$? Колики је њихов збир?
10. У позоришној дворани са два партера (лево и десно) у сваком партеру има онолико редова, колико у реду има столица. Ако у сваком реду има једнак број столица и ако у сали има 578 столица, колико има редова у сали и колико је столица у једном реду?
11. Нека су $x$ и $y$ рационални бројеви: Да ли су тачна тврђења:
    а) Ако је $x < y$ онда је $x^2 < y^2$; б) Ако је $x^2 < y^2$, онда је и $x < y$?
12. Нека су $x$ и $y$ цели бројеви и нека је $x^2 + y^2 = 2$. Одреди све могуће вредност израза $x + y$.
13. Ако је $n$ паран природан број, онда је $n^2$ такође паран природни број. Докажи. Да ли слично тврђење важи и за непаран број?
14. Докажи тврђење: Ако је природан број $n$ ($\bar{u} > 1$) дељив природним бројем $\kappa$ ($1 < \kappa < \bar{u}$), онда је $\bar{u}^2$ дељиво са $\kappa^2$.
15. Постоји ли цео број чији је квадрат једнак 7776?
16. Докажи да је број $201920192019^2 - 1$ дељив са 10.
17. Колики је збир последњих цифара бројева $1^2, 2^2, ... 99^2, 100^2$?
18. Постоје ли цели бројеви $x$ и $y$ такви да је $x^2 + y^2 = 11$?

19. Ако је $x > y$, шта је веће: $(x - y)^2$ или $(x + y)^2$?

20. Да ли је тачно тврђење: Ако је природан број $n^2$ $(n > 1)$ дељив простим бројем $p$, онда је $n^2$ дељив и са $p^2$?

21. Квадрати свих природних бројева записани су редом један за другим и тако је добијен низ: 1491625364964... Одреди цифру која се налази на 368. месту у том низу.

22. Конвексан четвороугао подељем је својим дијагоналама на четири троугла чије су површине природни бројеви $a$, $b$, $c$ и $d$. Докажи да је производ $a \cdot b \cdot c \cdot d$ потпун квадрат. Постоји ли двоцифрен природан број који је једнак квадрату збира својих цифара?

23. * Одреди најмањи природан број $a$ такав да је $1350 \cdot a$ потпун квадрат.

24. * Одреди последњу цифру броја $S = 1^2 + 2^2 + ... + 2021^2 + 2022^2$.

25. * Докажи да је збир последњих цифара бројева $1^2, 2^2, ... , 9999^2$ дељив са 9000.

26. * Дешифруј квадрирање $(5c + 1)^2 = \overline{abca}$, ако једнаким цифрама одго- варају једнака слова и различитим цифрама различита слова.

27. * Мој прадеда је рођен у другој половини XIX века. Које године је он славио свој 70 рођендан, ако је године са редним бројем $x^2$, имао тачно $x$ година?

## ДОМАЋИ ЗАДАТАК

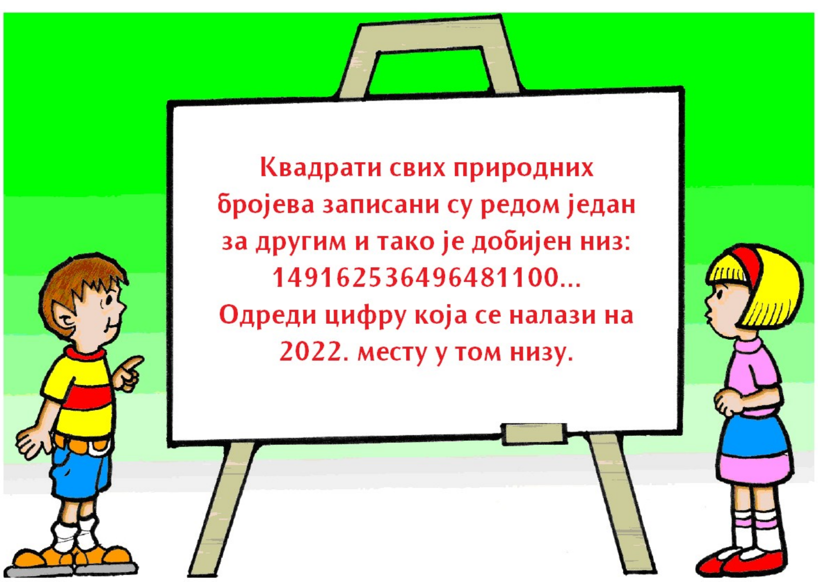
1) Колико има природних бројева мањих од 1000 који имају тачно три делиоца?

2) Постоји ли природан број $n$ такав да је $n^2 - 8$ дељиво са 5?

3) Дешифруј квадрирање: $(**)^2 = 45 \cdot *2*$ .

4) Да ли је број 2121212121 потпун квадрат?

5) Дат је број $a = 0,4444...$ са бесконачно много децималних цифара које су све једнаке 4. Докажи да је $a$ квадрат рационалног броја и израчунај $a^2$.



# ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

## 8. РАЗРЕД

## ТЕМА 801 ПИТАГОРИНИ БРОЈЕВИ

Један од најстаријих, најпознатијих и најзанимљивијих проблема теорије бројева свакако је проблем Питагориних бројева. Питагориним бројевима или *Питагориним тројкама* $(x, y, z)$ називају се природни бројеви $x$, $y$ и $z$ који задовољавају Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$. Троугао чији су мерни бројеви страница $x$, $y$ и $z$ природни бројеви који задовољавају релацију $x^2 + y^2 = z^2$ назива се *Питагорин троугао*. Наредни примери илуструју најважнија својства Питагориних бројева.

*<u>ПРИМЕР 8.</u> Ако је $(x, y, z)$ Питагорина тројка, онда је и тројка $(y, x, z)$ Питагорина тројка.*

РЕШЕЊЕ: Јасно је да ако важи једнкост $x^2 + y^2 = z^2$, онда важи и $y^2 + x^2 = z^2$, што значи да ако је $(x, y, z)$ Питагорина тројка онда је и $(y, x, z)$ такође Питагорина тројка.

*<u>ПРИМЕР 9.</u> Ако је $(x, y, z)$ Питагорина тројка, онда је и $(кx, кy, кz)$ такође Питагорина тројка (к је природан број).*

РЕШЕЊЕ: Ако је $(x, y, z)$ Питагорина тројка, онда је $x^2 + y^2 = z^2$, али је онда и $к^2x^2 + к^2y^2 = к^2z^2$ $(к \in \mathrm{Z})$, што значи да је и $(кx)^2 + (кy)^2 = (кz)^2$. Дакле, $(кx, кy, кz)$ је Питагорина тројка.

*<u>ПРИМЕР 10.</u> Питагориних тројки има бесконачно много.*

РЕШЕЊЕ: Како се за сваки природан број к од Питагорине тројке (x, y, $z$) може добити Питагорина тројка $(кx, кy, кz)$, јасно је да свака Питагорина тројка генерише бесконачно много нових Питагориних тројки.

Питагорина тројка $(x, y, z)$ је *основна Питагорина тројка*, ако су природни бројеви $x$, $y$ и $z$ узајамно прости. Тако су Питагорине тројке (3, 4, 5), (12, 5, 13) и (20, 21, 29) основне, а Питагорине тројке (12, 16, 20), (24, 10, 26) и (40, 42, 58) изведене, јер су добијене од основних множењем са 4, односно са 2.

*<u>ПРИМЕР 11.</u> Ако је $(x, y, z)$ основна Питагорина тројка, онда су $x$ и $y$ природни бројеви различите парности.*

РЕШЕЊЕ: Ако су $x$ и $y$ парни бројеви онда је $x = 2a$ и $y = 2b$. Тада је и $z$ паран, па је $z = 2c$ $(a, b, c \in \mathrm{N})$. Следи НЗД $(x, y, z)$ = НЗД $(2a, 2b, 2c) = 2$.

То значи да $x$, $y$ и $z$ нису узајамно прости, јер имају заједнички делилац већи од 1, па ова могућност отпада.

Ако су $x = 2a + 1$ и $y = 2b + 1$ ($a, b \in \mathrm{N}$) непарни бројеви онда је $z$ паран број, $z = 2c$ ($c \in N$), па се из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, добија да је $(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = (2c)^2$ или $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4c^2$. Како је са десне стране једнакости број који је дељив са 4, а са леве стране број који при дељењу са 4 даје остатак 2, ни ова једнакост није могућа.

Дакле, $x$ и $y$ не могу бити исте парности.

Из доказаног следи да, ако је $(x, y, z)$ основна Питагорина тројка, онда је $z$ непаран природан број.

*<u>ПРИМЕР 12.</u> Тројка $(x, y, z)$ је основна Питагорина тројка, ако и само ако постоје природни бројеви $m$ и $n$ такви да је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, при чему је $m > n$, НЗД $(m, n) = 1$ и $m$ и $n$ су различите парности.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $x$ паран, а $y$ и $z$ непарни чланови основне Питагорине тројке $(x, y, z)$. Из Питагорине једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, следи да је $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Бројеви $z + y = 2a$ и $z - y = 2b$ су парни, па је $x^2 = 4ab$.

Треба доказати да су $a$ и $b$ узајамно прости. Ако се претпостави супротно, тј. да $a$ и $b$ имају заједнички делилац $d$, онда је $z + y = кd$ и $z - y = ld$. Тада је $2z = d(к + l)$, а $2y = d(к - l)$, па $x$, $y$ и $z$ нису узајмно прости, (сви су дељиви са $d$) што је у супротности са претпоставком да је $(x, y, z)$ основна Питагорина тројка.

Како су $a$ и $b$ узајамно прости, да би $x^2 = 4ab$ био потпун квадрат мора бити $a = m^2$ и $b = n^2$. Тада је $x^2 = 4m^2n^2$, па је $x = 2mn$. Слично је $z + y = 2m^2$ и $z - y = 2n^2$, тј. $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$.

Да би $y$ био природан број, мора бити $m^2 > n^2$, тј. $m > n$. Бројеви $m$ и $n$ морају бити узајамно прости, јер ако би имали заједнички делилац, онда би тај делилац био заједнички и за $x$, $y$ и $z$. И на крају $m$ и $n$ морају бити различите парности јер би у супротном $x$, $y$ и $z$ били парни и имали заједнички делилац 2.

Да важи и обрнуто тврђење следи из: $x^2 + y^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2$.

Бројеви $x$, $y$ и $z$ су узајамно прости, јер када би имали заједнички делилац, онда би он био заједнички делилац и за $m$ и $n$, што није могуће, јер су $m$ и $n$ узајамно прости.

Ако је $m = 3$, а $n = 2$, онда је $x = 12$, $y = 5$ и $z = 13$. Међутим, ако $m$ и $n$ не испуњавају три дата услова, опет се добија Питагорина тројка, али она није основна. Тако се за $m = 4$ и $n = 2$ добија $x = 16$, $y = 12$ и $z = 20$.

Може се закључити да формуле $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$ ($m$ и $n$ су природни бројеви и *т* > *п*) увек генеришу неку Питагорину тројку, али да је та Питагорина тројка основна само у случају да $m$ и $n$ испуњавају и преостала два услова ($m$ и $n$ су узајмно прости и разчличите парности).

Следећа табела показује како добијено опште решење Питагорине једначине генерише неке основне и одговарајуће, а изведене Питагорине тројке:

| | | *Основне Питагорине тројке* | | | Изведене Питагорине тројке | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *м* | *n* | *x* | *y* | *z* | *к* = 2 | | | *к* = 3 | | |
| | | | | | *x* | *y* | *z* | *x* | *y* | *z* |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 8 | 6 | 10 | 12 | 9 | 15 |
| 3 | 2 | 12 | 5 | 13 | 24 | 10 | 26 | 36 | 15 | 39 |
| 4 | 1 | 8 | 15 | 17 | 16 | 30 | 34 | 24 | 45 | 51 |
| 4 | 3 | 24 | 7 | 25 | 48 | 14 | 50 | 72 | 21 | 75 |
| 5 | 2 | 20 | 21 | 29 | 40 | 42 | 58 | 60 | 63 | 87 |
| 5 | 4 | 40 | 9 | 41 | 80 | 18 | 82 | 120 | 27 | 123 |
| 6 | 1 | 12 | 35 | 37 | 24 | 70 | 74 | 36 | 105 | 111 |
| 6 | 5 | 60 | 11 | 61 | 120 | 22 | 122 | 180 | 33 | 183 |
| 7 | 2 | 28 | 45 | 53 | 56 | 90 | 106 | 84 | 135 | 159 |
| 7 | 4 | 56 | 33 | 65 | 112 | 66 | 130 | 168 | 99 | 195 |
| 7 | 6 | 84 | 13 | 85 | 168 | 26 | 170 | 252 | 39 | 255 |
| 8 | 1 | 16 | 63 | 65 | 32 | 126 | 130 | 48 | 189 | 195 |
| 8 | 3 | 48 | 55 | 73 | 96 | 110 | 146 | 144 | 165 | 219 |
| 8 | 5 | 80 | 39 | 89 | 160 | 78 | 178 | 240 | 117 | 267 |
| 8 | 7 | 112 | 15 | 113 | 224 | 30 | 226 | 336 | 45 | 339 |

Примери који следе су задаци које је Диофант Александријски решавао у шестој књизи своје ''Аритметике'', а овде се излажу у нешто савременијој формулацији.

*ПРИМЕР 13. Одреди све Питагорине троуглове код којих је једна страница једнака* 12.

РЕШЕЊЕ: У Питагориној тројци ($кx$, $кy$, $кz$) ($к \leq 4$) један елеменат је 12.

Ако је $к = 1$, могући су следећи случајеви:

1) Ако је $x = 2mn = 12$, онда је:

1.1) $m = 6$, $n = 1$ и $x = 12$, $y = 35$, $z = 37$;

1.2) $m = 3$, $n = 2$ и $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$;

2) Ако је $y = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 12$, онда је $m + n = 6$, а $m - n = 2$. Тада је $m = 4$ и $n = 2$, па је $x = 16$, $y = 12$ и $z = 20$.

3) Ако је $z = m^2 + n^2 = 12$, онда не постоје природни бројеви $m$ и $n$ чији је збир квадрата 12.

Ако је $к = 2$, могући су следећи случајеви:

4) Ако је $x = 2mn = 6$, онда је $m = 3$, $n = 1$ и $x = 2 \cdot 6 = 12$, $y = 16$, $z = 20$;

5) Ако је $y = m^2 - n^2 = 6$ или $z = m^2 + n^2 = 6$, онда нема решења.

Ако је $к = 3$, могући су следећи случајеви:

6) Ако је $x = 2mn = 4$, онда је $m = 2$, $n = 1$ и $x = 3 \cdot 4 = 12$, $y = 9$, $z = 15$;

7) Ако је $y = m^2 - n^2 = 4$ или $z = m^2 + n^2 = 4$, онда нема решења.

Ако је $к = 4$, могући су следећи случајеви:

8) Ако је $x = 2mn = 3$, $y = m^2 - n^2 = 3$ и $z = m^2 + n^2 = 3$, онда нема решења.

Дакле решења су: (12, 5, 13), (12, 35, 37), (16, 12, 20) и (12, 9, 15).

*ПРИМЕР 14. Докажи да постоји бесконачно много правоуглих троуглова код којих је хипотенуза за 1 већа од дуже катете.*

*РЕШЕЊЕ:* Како су y и z непарни бројеви, то они нису узастопни природни бројеви. Према томе $x + 1 = z$, тј. $2mn + 1 = m^2 + n^2$, па је $m^2 + n^2 - 2mn = 1$, или $(m - n)^2 = 1$. Дакле, $m = n + 1$, па све основне Питагорине троуглове код којих је хипотенуза за један већа од катете генеришу следеће једнакости: $x = 2n(n + 1) = 2\bar{n}^2 + 2\bar{n}$, $y = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, $z = (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$.

## ЗАДАЦИ

1. Ако је $(x, y, z)$ основна Питагорина тројка, онда је $x$ увек дељив са 4, $y$ је непаран број већи од 1, а $z$ је облика $4к + 1$. Докажи.
2. Да ли постоји основна Питагорина тројка чији је елемент број 30? Да ли постоји Питагорина тројка чији је елемент број 30?
3. Ако је $к$ природан број већи од 2, онда увек постоји Питагорина тројка чији је елемент број $к$. Докажи. Да ли тврђење важи и за основне Питагорине тројке?
4. Докажи да су мерни бројеви обима и површине Питагориних троуглова парни бројеви.
5. Одреди све Питагорине троуглове чији мерни број обима је једнак мерном броју површине.
6. Постоји ли Питагорин троугао чија је површина једнака: а) 78; b) 120?
7. Одреди Питагорин троугао чији је обим: а) 88; b) 84.
8. Колико има Питагориних троуглова код којих је мерни број површине 4 пута већи од мерног броја обима?
9. Ивице квадра су $a = 12$ и $b = 5$. Одреди трећу ивицу квадра $c$, тако да су и ивица $c$ и дијагонала квадра $D$ природни бројеви.
10. Докажи да је полупречник круга уписаног у Питагорин троугао увек природан број.
11. Ако су $a$, $b$ и $c$ цели бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$, онда је бар један од бројева $a$ и $b$ дељив са 3. Докажи.
12. Постоји ли основни Питагорин троугао код кога је полупречник кружнице описане око троугла природан број?
13. Да ли је хипотенузина висина у Питагорином троуглу природан број?
14. Нека су $a$, $b$ и c природни бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$. Докажи да је број $abc$ дељив са 60.

15. Докажи да једначина $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева, тј. докажи да Питагориних четворки има бесконачно много.

16. Постоји ли Питагорин троугао чији је обим: а) потпун квадрат; б) потпун куб?

## ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Колико има Питагориних тројки чији један елеменат је број 13?

2) Постоји ли Питагорин троугао чији је обим једнак 60?

3) Постоји ли Питагорин троугао чија је површина једнака 120?

4) Постоји ли основни Питагорин троугао код кога је полупречник уписане кружнице природан број? Колико таквих троуглова има?

5) Одреди бар једно решење једначине $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ у скупу природних бројева.