ЕЛЕКТРОНСКИ ЧАСОПИС ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ

ДИОФАНТ

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА

ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО

ГОДИНА 2, БРОЈ 18 - ЧАЧАК, ЈАНУАР 2023.

ДИОФАНТ

Електронски часопис за
додатну наставу математике

Година 2.

Број 18

Чачак, јануар 2023.

Уредник часописа:

др Војислав Андрић (voja.andric@gmail.com)

Издавач:

Математички клуб „Диофант“ Ваљево,

14000 Ваљево, Поп Лукина 38

Телефон 065 291 22 00; e – mail: diofant2020@gmail.com

Све прилоге, предлоге и примедбе слати путем електронских адреса:
diofant2020@gmail.com и voja.andric@gmail.com

Часопис је бесплатан

Излази повремено и по потреби

ISSN (Online) 2812-9520

САДРЖАЈ

- Најкраће о зимској школи 4
- Институције и појединци који су подржали Зимску школу 5
- Учесници 6
- План рада 14
- Распоред наставних активности 15
- Настава 16
- Реализоване теме 17
- 3. разред 17
- 4. разред 29
- 5. разред 43
- 6. разред 55
- 7. разред 65
- 8. разред 78
- Диофантово математичко такмичење 90
- Резултати такмичења и турнира у Зимској школи 101
- Резултати анонимне анкете 103
- Литература за додатни рад 114

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА

ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО

НАЈКРАЋЕ
О ЗИМСКОЈ ШКОЛИ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА - ЧАЧАК 2023.

Идеја о Зимској школи младих математичара родила се после успешно реализоване Летње школ младих математичара Косова и Метохије која је прошлог лета реализована у Лепосавићу. У опцији је било неколико локација (Пожаревац, Руски Крстур, ...) , али после понуде из Чачка и увида у веома добре услове који су нам понуђени, није било дилема.

Зимска школа младих математичара одржана је у Чачку од 8. до 14. јануара 2023. године. То је практично био једини могућ повољан термин (између Божићних празника и Државног семинара за наставнике математике и информатике), јер је наведени период био пресек важећих зимских школских распуста у Србији. Било је пријављено 114 учесника (63 из Чачка и околине и 51 из других крајева Србије). Зимска школе је реализова уз учешће 113 ученика (62 из Чачка и 51 из осталих крајева Србије). Наставни програм од 42 теме (6 разреда по 7 тема) реализовало је 13 предавача и један рекреатор. Поред наставног програма који је садржао занимљиве теме намењене проширивању и продубљивању математичких знања ученика, реализован је и богат програм ваннаставних активности у оквиру кога је било шетњи, квизова, математичких такмичења, турнира у шаху и стоном тенису, такмичења у решавању судоку проблема и слагању Рубикове коцке и такмичења у оквиру кога је од заборава сачувана наша прелепа и веома занимљива национална логичко-комбинаторна игра „Мица“. У склопу програма треба поменути и свечано отварање и завршну свечаност које су дале посебан печат утиску о реализацији Летње школе. Учесници су се дружили и врло брзо је успостављен мост пријатељства између деце из Чачка и разних крајева Србије, чему су значајно допринели ученици и наставници из Чачка својим срдачним и домаћинским односом.

Организацију и реализацију Летње школе младих математичара – Чачак 2023. потписује Математички клуб „Диофант“ из Ваљева који се својски трудио да све планиране акције уклопи у складан дневни програм и учини зимску школу што занимљивијом и мотивационо прихватљивијом за њене учеснике. Колико се у томе успело показује анонимна анкета чији резултати су саставни део овог броја електронског часописа „Диофант“. Сигурно да није све било идеално и да искустава стечена у реализацији овакве једне акције могу дати позитивне поуке и стручно-педагошке импулсе који ће допринети да наредна окупљања младих математичара у Чачку буду и садржајнија и још боље организована.

Математички клуб „Диофант“ из Ваљева се најискреније захваљује свим институцијама и појединцима који су нам помогли у организацији и реализацији Зимске школе младих математичара – Чачак 2023. уз реална очекивања да ће се веома коректна сарадња исказана у реализацији овогодишње зимске школе школе наставити и резултирати новим окупљанима деце обдарене и заинтересоване за математику. Посебно месту том скупу заузима Дом ученика у Чачку, чије руководство и особље је допринело да се ученици и наставници у зимској школи осећају као код своје куће. И наравно људи који су

др Војислав Андрић

ИНСТИТУЦИЈЕ И ПОЈЕДИНЦИ
КОЈИ СУ КАО СУОРГАНИЗАТОРИ ПРОГРАМА, ДОНАТОРИ УЧЕСНИКА
ИЛИ САРАДНИЦИ ПОДРЖАЛИ РЕАЛИЗАЦИЈУ
ЗИМСКЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА – ЧАЧАК 2023.

Мирослав Петковић	Град Чачак
Ивана Величковић	Дому ученика Чачак
Слађана Парезановић	Школска управа Чачак
Јован Тошић	Музичка школа „др Војислав Вучковић“ – Чачак
Мирослав Мандић	Основна школа „Свети Сава“ – Чачак
Иван Ружичић	Гимназија у Чачку
Милко Иконић	Основна школа „Вук Караџић“ – Чачак
	Галерија Надежде Петровић Народни музеј Чачак
ДОНАТОРИ СТИПЕНДИЈА ЗА УЧЕШЋЕ ПОЈЕДИНИХ УЧЕНИКА	
	Општина Мионица
	Општина Осечина
Иван Шишовић	„Spothopper“ - Ваљево
Радмила Трифуновић	Клуб привредника Горњи Милановац
Светлана Милићевић	Раух – Коцељева
Владимир Марић	Х бренд – Ваљево
Радоје Грујичић	ТИК – Ваљево
Слободан и Војкан Петровић	„Полиформ“ – Ваљево
Владица Мишковић	Занатска машинбраварска радион. Владица Мишковић
Бранислав Срећковић	„Енел“ - Ваљево
Александар Белушевић	Ауто школа „Отворени семафор“ – Ваљево
Бранко Ковачевић	Унитас фонд - Београд
Иван Стоилковић	Урбан Техникс - Ваљево
Жељко Плавшић	Уна – Ваљево
Бора Радојичић	Металпром – Ваљево
Јадранка Сташевић	Белгија
проф. др Бранко Глишић	Универзитет Принстон – САД
проф. др Александар Миленковић	Универзитет Алабама - САД
др Војислав Андрић	Математички клуб „Диофант“ Ваљево

УЧЕСНИЦИ
ЗИМСКЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023

3. РАЗРЕД

1.	Алекса Прлинчевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
2.	Андреј Вујовић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
3.	Антонина Ружичић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
4.	Даница Мајсторовић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
5.	Ђурђа Прлинчевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
6.	Елена Вилотијевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
7.	Ива Вилотијевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
8.	Лена Мандић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
9.	Лена Стевановић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
10.	Лука Ружичић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
11.	Никола Јовановић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
12.	Николина Маринковић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
13.	Николина Ружичић	ОШ "Свети Сава"	Чачак

4. РАЗРЕД

14.	Алексеј Бошковић	ОШ "Академик Миленко Шушић"	Гуча
15.	Ана Бурмаз	ОШ "Сестре Илић"	Ваљево
16.	Андреј Крајиновић	ОШ "Андра Савчић"	Ваљево
18.	Анђелија Сталовић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
19.	Виктор Перић	"Прва основна школа"	Ваљево
20.	Вишња Марковић	ОШ "Академик Миленко Шушић"	Гуча
21.	Вукашин Павловић	ОШ "Сестре Илић"	Ваљево
22.	Давид Ковачевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
23.	Деспот Лазовић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
24.	Дуња Бурмаз	ОШ "Сестре Илић"	Ваљево
25.	Дуња Милошевић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
27.	Илија Цветковић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
28.	Лена Беговић	ОШ "Нада Пурић"	Ваљево
29.	Лена Сретић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
31.	Марија Зечевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
32.	Миа Марић	ОШ "Јован Дучић"	Нови Београд
33.	Мина Пујић	ОШ "Владика Николај Велимировић"	Ваљево
35.	Наталија Недовић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
36.	Неда Василијевић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
37.	Никола Шеловић	ОШ "Др Драгиша Мишовић"	Чачак
38.	Павле Капларевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
39.	Павле Прлинчевић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
40.	Петар Топаловић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
41.	Софија Лазаревић	ОШ "Мића Станојловић"	Коцељева

5. РАЗРЕД

43.	Александар Митровић	"Прва основна школа"	Ваљево
44.	Ана Југовић	ОШ "Сесре Илић"	Ваљево
45.	Андреа Браловић	ОШ "Иво Андрић"	Прањани
47.	Виктор Савић	ОШ "Десанка Максимовић"	Ваљево
48.	Ђорђе Ружичић	ОШ "Милица Павловић"	Чачак
49.	Ива Стефановић	ОШ "Сестре Илић"	Ваљево
50.	Јаков Поповић	ОШ "Милан Ракић"	Мионица
51.	Коста Живановић	ОШ "Мића Станијловић"	Коцељева
52.	Лана Марковић	ОШ "Иво Андрић"	Прањани
53.	Матија Чакаревић	ОШ "Вук Стефановић Караџић"	Чачак
54.	Милица Војиновић	ОШ "Војвода Живојин Мишић"	Рајковић
55.	Михајло Јанић	ОШ "Драгомир Марковић"	Крушевац
56.	Огњен Поповић	ОШ "Милан Ракић"	Мионица
57.	Растко Софранић	ОШ "Мића Станојловић"	Коцељева
58.	Сава Младеновић	ОШ "Милован Глишић"	Ваљево
59.	Селена Петровић	ОШ "Др Драгиша Мишовић"	Чачак
60.	Стеван Ралић	ОШ "Сестре Илић"	Ваљево
61.	Стефан Читаковић	ОШ "Милан Ракић"	Мионица
62.	Хана Дикић	ОШ "Милан Ракић"	Мионица

6. РАЗРЕД

63.	Ана Џамбасевић	ОШ "Милица Павловић"	Чачак
64.	Јана Марковић	ОШ "Јован Ристић"	Борча
65.	Јован Ружичић	ОШ "Милица Павловић"	Чачак
66.	Јована Мајсторовић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
67.	Коста Цветковић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
68.	Лазар Ћосић	ОШ "Влад. Николај Велимировић"	Ваљево
69.	Љубица Каранац	ОШ "Свети Сава"	Чачак
70.	Милена Масал	ОШ "Свети Сава"	Чачак
71.	Мина Гладовић	ОШ "Кадињача"	Лозница
72.	Мина Цоковић	ОШ "Сестре Илић"	Ваљево
73.	Миодраг Ђукић	ОШ "Кадињача"	Лозница
74.	Немања Додевски	ОШ "Нада Пурић"	Ваљево
75.	Никола Мијаиловић	ОШ "Десанка Максимовић"	Ваљево
76.	Новак Јанковић	ОШ "Милан Ракић"	Мионица
77.	Петар Чаворовић	ОШ "Свети Сава"	Чачак
78.	Сара Урошевић	ОШ "Војвода Живојин Мишић"	Брежђе
79.	Уна Јовановић	ОШ "Свети Сава "	Чачак
81.	Магдалена Комадинић		Чачак
82.	Катарина Недовић		Чачак

7. РАЗРЕД

83.	Андреа Арсенијевић	ОШ "Лепосавић"	Лепосавић
84.	Василије Вучковић	ОШ "Иван Гундулић"	Нови Београд
85.	Димитрије Јанић	ОШ "Драгомир Марковић"	Крушевац
86.	Ивана Трифуновић	Ваљевска гимназија	Ваљево
87.	Јован Јакшић	ОШ "Јован Цвијић"	Зубин Поток
89.	Коста Ненковић	ОШ "Драгомир Марковић"	Крушевац
90.	Лука Олави Тадић	Ваљевска гимназија	Ваљево
91.	Марко Станковић	ОШ "8.октобар"	Власотинце
92.	Милан Јанић	ОШ "Др Драгиша Мишовић"	Чачак
93.	Милан Костић	ОШ "Бранко Радичевић"	К. Митровица
94.	Софија Мићевић	Ваљевска гимназија	Ваљево
95.	Филип Јоцовић	ОШ "Десанка Максимовић"	Гор.Милановац

8. РАЗРЕД

96.	Алекса Гавриловић	ОШ "Дуле Караклајић"	Лазаревац
97.	Анђела Папић	ОШ "Иво Андрић"	Чачак
98.	Вања Бекировић	ОШ "Дуле Караклајић"	Лазаревац
99.	Дарја Ковачевић	ОШ "Др Драгиша Мишовић"	Чачак
100.	Душан Ђорђевић	ОШ "Дуле Караклајић"	Лазаревац
101.	Лазар Јоцовић	ОШ "Десанка Максимовић"	Чачак
103.	Лука Грујанац	ОШ "Владислав Петковић Дис"	Чачак
104.	Магдалена Миливојевић	ОШ "Лепосавић"	Лепосавић
105.	Анастасија Младеновић	ОВЦ "Браћа Недић"	Осечина
106.	Наталија Милошевић	ОШ "Иво Андрић"	Чачак
107.	Никола Тимотић	Ваљевска гимназија	Ваљево
108.	Огњен Брдар	ОШ "Владислав Петковић Дис"	Чачак
109.	Павле Брдар	ОШ "Владислав Петковић Дис"	Чачак
110.	Пеђа Плавшић	ОШ "Владислав Петковић Дис"	Чачак
111.	Теодора Драмићанин	ОШ "Милица Павловић"	Чачак
112.	Тијана Милић	ОШ "Филип Филиповић"	Чачак
113.	Уна Минић	ОШ "Десанка Максимовић"	Г. Милановац

ПРЕДАВАЧИ

1.	проф. Александра Милошевић	Нови Сад
2.	проф. др Бојан Башић	Нови Сад
3.	проф. Верица Марковић	Ваљево
4.	проф. Весна Пешов	Чачак
5.	др Војислав Андрић	Ваљево
6.	проф. Ивана Андрејић	Чачак
7.	проф. Ивана Пецикоза	Ваљево
8.	проф. Иванка Томића	Ваљево
9.	проф. др Душан Ђукић	Београд
10.	проф. др Кристина Аго	Нови Сад
11.	проф. Љиљана Врачар	Београд
12.	проф. Марија Стевановић	Чачак
13.	проф. Маријана Стефановић	Ваљево
14.	проф. Радиша Ковачевић	Ваљево


REPLAY

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНИХ ШКОЛА -
ЧАЧАК, 08. – 14. 01. 2023.

РАСПОРЕД АКТИВНОСТИ
У ОКВИРУ ЗИМСКЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА – ЧАЧАК 2023.

Дан	09:00 – 11:00	11:00 – 13:00	15:00 – 17:00	17:00 – 18:00	18:00 – 19:00	20:00 – 21:00	21:00 – 22:00
Недеља, 08.01.2023.	Долазак и пријем учесника Зимске школе		Настава 3, 6. и 7. разред	Настава 4, 5. и 8. Разред		Математичка радионица	Турнир - Шах
Понедељак, 09.01.2023.	Настава 3, 5. и 8. разред	Настава 4, 6. и 7. разред	Настава 3. и 4. разред	Домаћи задаци 5, 6. и 8. разред	Домаћи задаци 3, 4. и 7. разред	Математичка радионица	Турнир – Судоку
Уторак, 10.01.2023.	Настава 3, 4. и 5. разред	Настава 6, 7. и 8. разред	Настава 5. и 6. разред	Домаћи задаци 3, 4. и 7. разред	Домаћи задаци 5, 6. и 8. разред	Математичка радионица	Турнир - Мица
Среда, 11.01.2023.	Настава 5, 7. и 8. разред	Настава 3, 4. и 6. разред	Настава 7. и 8. разред	Домаћи задаци 3, 4, и 5. разред	Домаћи задаци 6, 7. и 8. разред	Математичка радионица	Турнир - Рубикова коцка
Четвртак, 12.01.2023.	Настава 4, 6. и 7. разред	Настава 3, 5. и 8. разред	Слободно време	„Диофантово“ математичко такмичење		Математичка радионица	Финални део свих турнира
Петак, 13.01.2023.	Настава 4, 6. и 8. разред	Настава 3, 5. и 7. разред	Финални део турнира у оквиру Зимске школе		Завршна свечаност ЗШ	Математички квиз	
Субота, 14.01.2023.	Испраћај и одлазак учесника Зимске школе						

ПРОГРАМ НАСТАВНИХ АКТИВНОСТИ РЕАЛИЗОВАНИХ У ОКВИРУ ЗИМСКЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА – ЧАЧАК 2023.

Дан	3. РАЗРЕД	4. РАЗРЕД	5. РАЗРЕД	6. РАЗРЕД	7. РАЗРЕД	8. РАЗРЕД
Недеља, 08.01.2023.	15:00 Љиљана Врачар Пребројавање	17:00 Љиља Врачар Једначине и неједнач.	17:00 Маријана Стефановић Скупови и операције	15:00 Војислав Андрић: Дирихлеов принцип	15:00 Марија Стевановић Степени	17:00 Војислав Андрић Екстремни проблем.
Понедељак, 09.01.2023.	09:00 Маријана Стефановић Магични квадрати 15:00 Војислав Андрић: Верица Марковић	11:00 Ивана Пецикоза Задаци нумерације 15:00 Маја Стефановић Квадрат и правоугаон,	09:00 Љиљана Врачар Разломци – проширивање, скраћивање и упоређивање	11:00 др Кристина Аго: Диофантове једначине у скупу Z.	11:00 др Бојан Башић: Примена Дирихлеов принципа у геометрији	09:00 Војислав Андрић Линеарна Диофантова једнач.
Уторак, 10.01.2023.	09:00 Маријана Стефановић Узајамни положај правих. Угао	09:00 Љиља Врачар Задаци са матемтич. такмичења	09:00 Војислав Андрић Диофантове једнач. 15:00 Ивана Андрејић Угао	11:00 Ивана Андрејић Цели бројеви 15:00 Марија Стевановић Рационални бројеви	11:00 др Кристина Аго: Увод у комбинаторику	11:00 др Бојан Башић: Комбинаторика
Среда, 11.01.2023.	11:00 Маријана Стефановић Множење и дељење природних бројева	11:00 Радиша Ковачевић Дешифровање рачунских операција	09:00 Ивана Пецикоза Скупови тачака у равни	11:00 Иванка Томић Подударност троуглова	09:00 Марија Стевановић Квадрирање и корен. 15:00 Војислав Андрић: Метод посл. цифре	09:00 Ивана Андрејић Призма 15:00 Ивана Андрејић Конгруенције
Четвртак, 12.01.2023.	11:00 Верица Марковић Сабирање низова природних бојева	09:00 Љиљана Врачар Рачунске операциј. са природним броj.	11:00 А. Милошевић: Дељивост и прости бројеви	09:00 Алекс. Милошевић Геометријски доказ	09:00 Марија Стевановић: Површина троугла и четвороугла	11:00 др Душан Ђукић Нелинеарне Диофантове јед.
Петак, 13.01.2023.	11:00 Ивана Пецикоза Једначине	09:00 Верица Марковић Проблемски задаци	11:00 Марија Стевановић Разломци	09:00 А. Милошевић: Углови троугла	11:00 Ивана Андрејић Херонова формула	09:00 др Душан Ђукић Неједнакости

ЗИМСКА ШКОЛА
МЛАДИХ
МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО

НАСТАВА

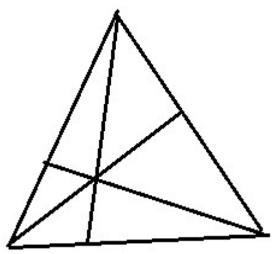

3. РАЗРЕД

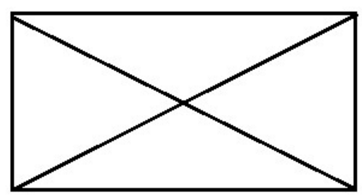
ТЕМА 3.1.

ПРЕБРОЈАВАЊЕ СКУПОВА ТАЧАКА

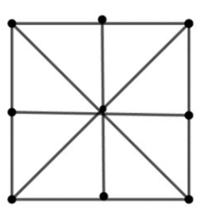
Предавач: Љиљана Врачар (Београд)

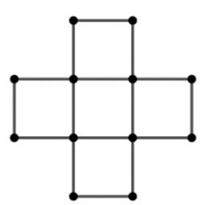
1. Дате су три различите тачке A, B и C. Колико најмање, а колико највише: а) правих; б) дужи одређују дате тачке?
2. На једној правој уочено је 7 тачака. Колико дужи је одређено тим тачкама?
3. Дато је 5 различитих тачака. Колико правих се може нацртати кроз дате тачке? Размотри све могуће случајеве.
4. На правој *a* дато је 6, а на њој пралелној правој *b* дате су 4 тачке. Колико је правих и колико дужи одређено датим тачкама ?
5. Троугао има три угла. Колико углова остане када се маказама одсече један угао?
6. Колико дужи, а колико троуглова има на следећим сликама:



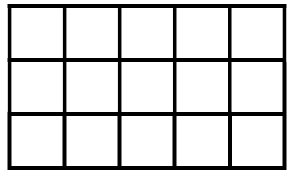


7. На кружници је дато 6 тачака. Колико има дужи чији су крајеви дате тачке ? Колико има троуглова чија су темена дате тачке ?
8. Дато је 5 тачака у равни. Колико најмање, а колико највише троуглова има темена у датим тачкама ? Могу ли дате тачке одређивати 8 троуглова ?
9. Квадрат странице 4 cm подељен је на квадратне центиметре. Нацртати слику и пребројати колико дужи, колико квадрата, а колико правоугаоника се може уочити на тако добијеној слици ?
10. Колико дужи, квадрата и правоугаоника садржи правоугаоник чије су димензије 3 cm и 5 cm, када се подели на квадратне центиметре.
11. Колико најмање, а колико највише правих је одређено са 7 тачака?
12. Колико дужи, а колико троуглова, квадрата и правоугаоника се може уочити на датим сликама?

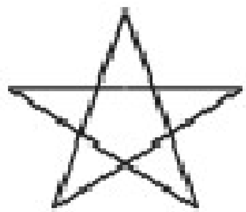


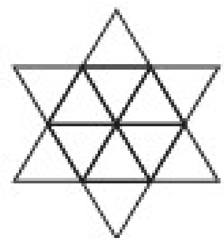


13. Колико дужи, квадрата и правоугаоника садржи правоугаоник на наредној слици.



14. Колико дужи и троуглова има на датим сликама ?

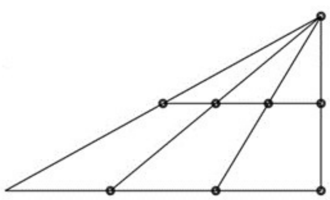


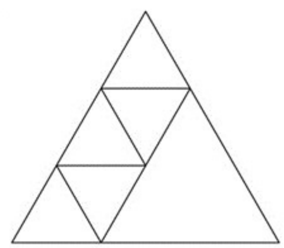


ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) Нацртај дуж XY= 7cm, на њој одреди тачку T тако да је XT=2cm и RY=4cm. Колика је дужина дужи TR? Које све дужи уочаваш на слици?

2) Колик дужи има на слици (лево)?





3) Колико троуглова има на слици (десно)?

ТЕМА 3.2.

МАГИЧНИ КВАДРАТ

Предавач: Маријана Стефановић (Ваљево)

1. Допунити следеће магичне квадрате:

5		
4	6	
		7

6		
5	7	
10		

7	12	5
		10

2. Допуни празна поља у следећим магичним квадратима:

	5	7
	1	6

6		4
5		
	3	

5		3
9		7

3. Конструиши магичне квадрате чији су елементи:
   а) 2,3,4,5,6,7,8,9,10 ;
   б) 6,7,8,9,10,11,12,13,14 ;

4. Конструиши магични квадрат тако да му је карактеристичан збир једнак: а) 21; б) 33; в) 45.

5. Да ли се магични квадрати могу "сабирати", "одузимати", "множити" ? На примерима показати уочену особину.

6. Дати су бројеви: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16. Допуни дати магични квадрат.

	12		
	8	15	
7		2	
			11

7. У празне квадратиће упиши бројеве тако да збир свака три суседна броја буде 15.

3											7

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) Саставити магичан квадрат чији су елементи бројеви 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 ? Колики је карактеристичан збир тог квадрата ?

2) Конструисати магичне квадрате чији су елементи:
   а) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17
   б) 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90
   в) 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

3) Конструиши магичан квадрат димензија 4 x 4 тако да карактеристичан збир добијеног магичног квадрата буде 42.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО

ТЕМА 3.3.

ДЕШИФРОВАЊЕ РАЧУНСКИХ ОПЕРАЦИЈА

Предавач: Верица Марковић (Београд)

Дешифровати рачунске операције:

1) $*6 - 3* = 51$;
2) $*2 - 3* = 14$;
3) $*4 \cdot * = 3*0$;
4) $2*4 : 1* = *2$;
5) $** \cdot * - * = 2$
6) Збир неколико природних бројева једнак је њиховом производу и једнак је броју 12. Колико сабирака има тај збир, односно колико чинилаца има тај производ?

Дешифровати операције ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре:

7) А + АВ + АВС = 927
8) А + ВВ + ССС = 635
9) АВ + ВС + СА = АВС
10) АА + ВВ + СС = АВС
11) ЦАР + ЦАР = КРАЉ
12) САТ + САТ + САТ = МАТ
13) МЛ + МЛ+ МЛ + МЛ = ДМС
14) МЛ + МЛ + МЛ + МЛ + МЛ = ДМС
15) ЛАВ – ЗЕЦ = МИШ
16) Дата је једнакост: АВ + АВ + ... + АВ = 525. Колико најмање, а колико највише сабирака има дата једнакост?

Одредити бар једно решење следећих рачунских операција:

17) ДВА + ТРИ = ПЕТ
18) ТРИ + ПЕТ = ОСАМ
19) ТРИ + ТРИ = ШЕСТ
20) ДВА + ДВА + ДВА = ШЕСТ

ТЕМА 3.4.

НИЗОВИ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

Предавач: Маријана Стефановић (Ваљево)

1. Колико чланова имају низови:
   а) 1, 2, 3, ..., 46, 47?
   б) 18, 19, 20, ..., 74?
   в) 2, 4, 6, ..., 88, 90?

2. Уочи правило по коме се ређају елементи датог низа и напиши три следећа члана низа:
   5, 8, 11, 14, 17, ...

3. У сваком од следећих низова бројеви се ређају по неком правилу специфичном за сваки низ. Када утврдиш правило, продужи низ за најмање још три члана:
   а) 1, 3, 5, 7, 9, 11 ...
   б) 2, 4, 6, 8, 10, 12 ...
   в) 1, 2, 4, 8, 16 ...
   г) 1, 4, 9, 16, 25 ...
   д) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...
   ђ) 3, 4, 6, 9, 13, 18 ...
   е) 1, 3, 7, 15, 31 ...
   ж) 100, 99, 97, 94, 90, 85 ...

4. Који је последњи члан низа:
   а) 77, 67, 57, 47, 37 ...
   б) 88, 77, 66, 55, 44 ...
   в) 66, 63, 60, 57, 54 ...
   г) 58, 54, 50, 46, 42 ...
   д) 82, 65, 50, 37, 26 ...
   ђ) 90, 72, 56, 42, 30, ...

5. Који број не припада следећем низу:
   а) 100, 99, 97, 94, 89, 85, 79, 72 ...
   б) 4, 9, 14, 19, 24, 28, 34, 39 ...
   в) 1, 3, 6, 10, 15, 22, 28, 36, 45 ...
   г) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 23 ...
   д) 8, 17, 26, 35, 44, 52, 62, 71 ...

6. Дат је низ бројева: 1, 2, 3. Написати следећих пет чланова низа ако је сваки следећи члан низа једнак збиру претходна три члана низа.

7. Дат је низ бројева: 2, 6, 12 ... Написати следећих пет чланова низа ако је и сваки следећи члан низа једнак производу два суседна природна броја.

8. Овај задатак садржи двадесет три речи. Написати низ бројева тако да сваки члан низа представља редом број слова у свакој речи овог задатка.

9. Написати низ А кога чине прва слова сваке речи овог задатака и низ В кога чине последња слова сваке речи у овом задатку.

10. Дата су прва два члана низа С : 128, 64. Сваки следећи члан низа С једнак је половини збира претходна два члана низа. Израчунати први непаран члан датог низа.

11. Дата су прва два члана низа: 110, 68. Одредити последњи члан тога низа ако је сваки следећи члан низа природан број једнак разлици претходна два члана низа.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) Колико чланова има низ: 35, 37, 39, 41 ... 95, 97, 99?

2) Дат је низ: 2, 9, 16, 23, 30 ...
а) Напиши правило по коме се нижу чланови датог низа.
б) Одреди наредних пет чланова низа.

3) Дат је низ: 98, 85, 73, 62, 52 ...
а) Напиши правило по коме се нижу чланови датог низа.
б) Одреди последњи члан датог низа.

4) Наброј све чланове низа 87, 69, 53, 39, 27 ...

5) Одредити следећих пет чланова низа:
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24 ...

ТЕМА 3.5.

МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

Предавач: Маријана Стефановић (Ваљево)

1. Колико је: а) $25 \cdot 8$; б) $34 \cdot 5$;
в) $42 \cdot 3$; г) $57 \cdot 2$.

2. Израчунај вредност израза: а) $240 : 6$; б) $128 : 2$
в) $156 : 3$; г) $369 : 9$.

3. Израчунај: а) $95 - 8 \cdot 6$; б) $6 \cdot 12 - 3 \cdot 8$;
в) $26 + 4 \cdot 8$; г) $24 \cdot 3 - 12 \cdot 6$;
д) $95 : 5 + 4 \cdot 1$; ђ) $64 - 75 : 5$.

4. Збир бројева 17 и 76 увећај 4 пута.

5. Разлику бројева 98 и 66 увећај 3 пута.

6. Који број је 12 пута мањи од збира бројева 16 и 80?

7. Који броје 7 пута мањи од разлике бројева 111 и 20?

8. Израчунај : а) $(900 - 735) : 5$; б) $240 : 4 \cdot 7$; в) $221 + 7 \cdot 8$; г) $7 + 7 \cdot 7 + 77 : 7$;

9. Половину броја 168 сабери са трећином броја 186.

10. Шта је веће: петина броја 675 или шестина броја 720?

11. У продавницу се сваки дан допрема једнак број векни хлеба. Ако је за 3 дана допремљено 174 векни хлеба, колико се допрема дневно?

12. Дељеник је производ бројева 78 и 8, а делилац количник бројева 8 и 2. Израчунај количник.

13. Дељеник је збир бројева 55 и 23, а делилац је разлика бројева 64 и 59. Израчунај количник и остатак.

14. Марко је купио 9 истих оловака и платио 153 динара. Колико новца би потрошио а) Да је купио 6 оловака? б) Да је цена једне оловке мања за 2 динара?

15. Уместо звездица стави одговарајуће цифре тако да дате једнакости буду тачне:
а) ** : * · * = 32; б) * · * : * = 12.

16. Уместо звездица стави одговарајуће цифре тако да дате једнакости буду тачне:
а) ** · * = 30; б) ** · * = 72; в) * · * · * = 84.

17. Уместо звездица стави одговарајуће цифре тако да дате једнакости буду тачне:
а) ** : * = 32; б) ** : * = 43; в) ** : * : * = 7.

18. Ако једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре, реши следеће математичке ребусе:
а) А · В : С = СА; б) АА : В = ВВ; в) АА : В = СС.

19. Израчунај колико је $3 \cdot 37$, а потом реши следеће математичке ребусе:
а) А · АВ = ССС; б) А · А · АВ = ААА; в) А · В · АВ = ВВВ, ако једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) Трећину броја 84 сабери са четвртином броја 68. Који се број добија?

2) Број x је производ бројева 24 и 5, а број y је количник бројева 76 и 4. Ако је x дељеник, а y делилац колику су количник и остатак при дељењу броја x са бројем y?

3) Јасна је 3 чоколаде платила 345 динара. Колико кошта једна чоколада? Колико новца би јој требало за 4 чоколаде?

4) Уместо звездица стави одговарајуће цифре тако да се добије тачна једнакост:
** : * · * = 91. Колико има решења?

5) Израчунај колико је $3 \cdot 37$, а потом реши следеће математичке ребусе:
а) А · АВ = ССС; б) А · А · АВ = ААА; в) А · В · АВ = ВВВ, тако да једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре.

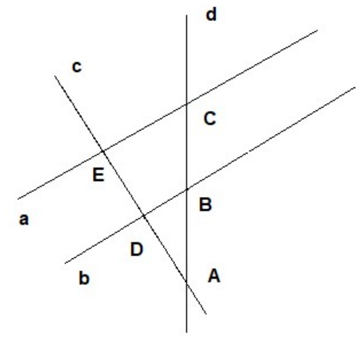
ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО

ТЕМА 3.6.

УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ПРАВИХ. УГАО

Предавач: Верица Марковић (Београд)

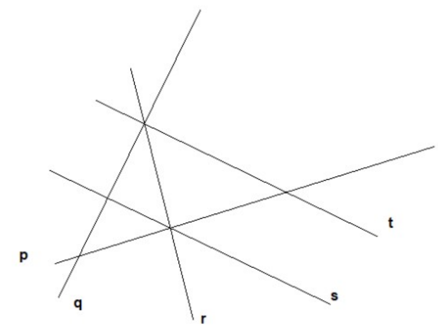
1. На основу слике допуни реченице тако да добијеш тачна тврђења.
   а) Паралелне праве су ___ и ___.
   б) Секу се праве ___и___ , ___ и ___, ___ и___, ___ и___, ___и___.
   в) Нормалне праве су ___и____, ___ и ____.
   г) пресечна тачка правих a и c је____.
   д) пресечна тачка правих b и d је ____.
   ђ) пресечна тачка правих a и b је ____.



2. На основу слике, у празна поља упиши симболе || или ⊥ тако да добијеш тачна тврђења

   а) p ___ r;   в) t ___ s;

   б) t ____ s;   г) s ____q.



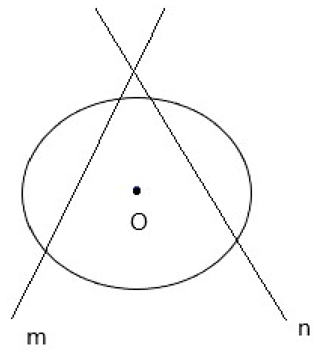
3. Праве a, b и c припадају истој равни. Ако су праве a и c паралелне, а права b је
а) паралелна прави c;
б) нормална на праву c;
у ком односу су праве a и b?
Нацртај одговарајућу слику.

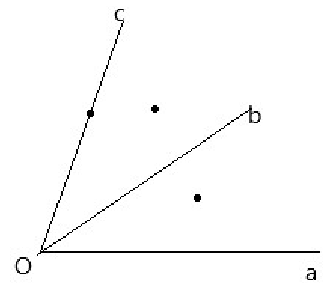
4. Које улице на слици:
а) су паралелне улици Михаила Петровића Аласа;
б) секу улицу Михаила Пупина;
в) су нормалне на Булевар Николе Тесле?

5. Дата је права a и тачка A која не припада правој a. Колико постоји правих које садрже тачку A и: а) паралелне су са правом a;   б) секу праву a;   в) нормалне су на праву a.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО

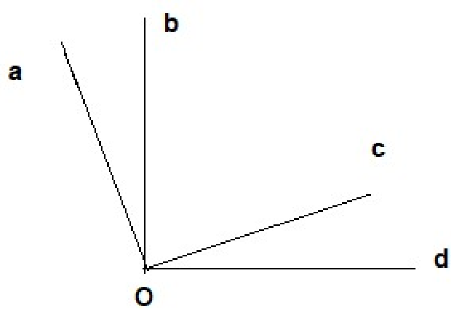
6. Нацртај на свом папиру круг са центром у тачки О и две праве *m* и *n* које се секу ван тог круга (види слику).
   а) Нацртај тачку В која припада и нацртаном кругу и правој *n*.
   б) Нацртај праву *s* која сече праву *n* у тачки В и пролази кроз центар О круга.
   в) Нацртај тачке C и D у којима права s сече кружну линију (кружницу).
   г) Шта представља дуж OC за дати круг?





7. На нацртаној слици обележи тачке A, B и C тако да се:
   * тачка B налази на полуправој Oc
   * тачка A налази у углу aOc и није у углу bOc

8. Међусобни положај полуправих Oa, Ob,Oc и Od дат је на следећој слици.

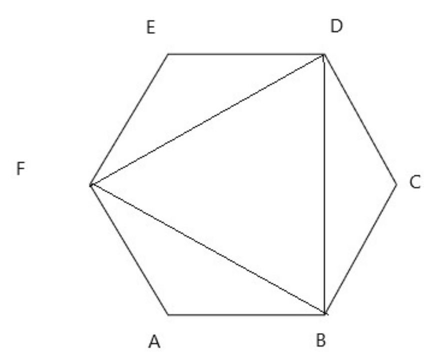


	Oa	Ob	Oc	Od
Oa				T
Ob				
Oc	П			
Od				

Попуни дату таблицу тако што ћеш у поља таблице написати слово О ако одговарајуће полуправе граде оштар угао; слово П ако одговарајуће полуправе граде прав угао; слово Т ако одговарајуће полуправе граде туп угао (дата су два примера).

9. Колико на наредној слици уочаваш оштрих, правих и тупих углова?
   За пребројавање углова можеш користити табелу у коју ћеш уписати број углова по врстама у свакој од тачака A,B,C , D, E и F.

	Оштрих	Правих	Тупих	Укупно
A				
B				
C				
D				
E				
F				
Укупно				



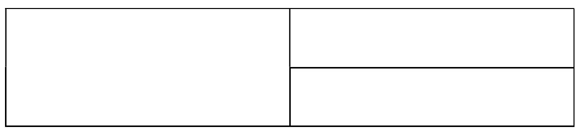
10. Допуни табелу уписујући бројеве уочених оштрих, правих и тупих углова на сваком од слова речи ПЕТАР.

	П	Е	Т	А	Р
оштрих			/		
правих			2		
Тупих			/		

11. Нацртај четири праве *a, b, c* и *d*, али тако да је права *a* нормална на праву *b,* права *c* нормална на праву *b,* а права *d* паралелна са *a*. Затим допуни табелу стављајући знак ⊥ (ако су праве нормалне) и знак || (ако су праве паралелене).

	a	*b*	*c*	*d*
a				
b				
c				
d				

12. Страницама три "слепљена" правоугаоника (види слику) одређено је шест правих. Обележи те праве словима a, b, c, d, e, f. Колико парова нормалних правих је на тај начин одређено?



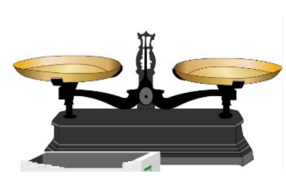
ТЕМА 3.7.

ЈЕДНАЧИНЕ – МЕТОД ТЕРАЗИЈА

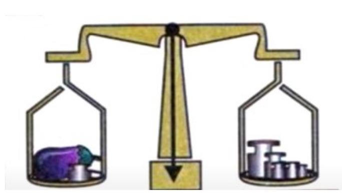
Предавач: Ивана Пецикоза (Ваљево)

Шта су то теразије?

Вага, теразије, кантар... Служе за мерење масе неког тела. Да бисмо измерили масу тела помоћу теразије, користимо тегове, или нешто чију масу већ знамо.



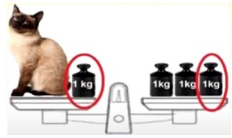
Зависно од тога шта је на теразијама, оне могу биту у равнотежи или неравнотежи.



1. Колика је маса вреће на слици? А маса лубенице?

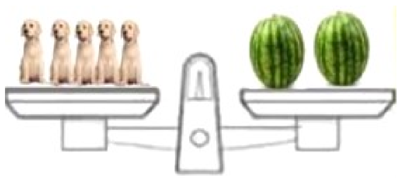
2.

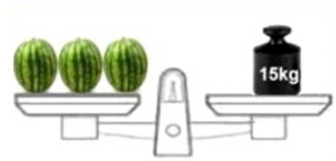
Одредити масу лубенице:

3. Одреди масу мачке са слике: 

4. Одредити масу Азраела а затим и штрумфова на основу дате две слике:

5. Према подацима са слике одредити масу једног кучета:





6. Коришћењем математичких теразија решити следеће једначине:

а) $x + 25 = 25 + 73$; б) $2x + 27 = 111$;
в) $3x + 55 = x + 87$; г) $5x + 82 = 3x + 98$.

7. Одредити решења следећих једначина:

а) $x - 15 = 27$; б) $2x - 45 = 55$;
в) $3x + 39 = 43 - x$; г) $4x - 74 = x - 8$;
д) $5x - 43 = 37 - 3x$.

8. Ако се дати број увећа за 98 добије се његова трострука вредност. О ком броју је реч ?

9. Три цигле и тег од 5 кг имају тежину једнаку 4 цигле и тега од 2 кг. Колико је тешка једна цигла ?

10. Збир два броја је 234, а њихова разлика је 48. Који су то бројеви ?

11. Отац је четири пута старији од сина, а заједно имају 45 година. Колико година има отац, а колико син.

12. За обављање неког посла Саша је требао да добије 150 динара и лопту. Међутим, Саша је обавио само половину посла и за то добио лопту и 25 динара. Колика је вредност лопте?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1. Коришћењем математичких теразија решити једначине:
   а) $2x + 43 = x + 67$; б) $7x - 13 = 17 - 3x$;
   в) $68 - 2x = 75 - 3x$.
2. Када Влада купи једну школску торбу преостане му 168 динара. Међутим, уколико жели да купи 3 торбе недостајаће му 56 динара. Колико кошта торба?
3. Мала и велика лубеница заједно имају масу 20 kg. Мала лубениц и тег од 5 kg, имају масу као велика лубеница и тег од 1 kg. Колика је маса мале, а колика велике лубенице?


4. РАЗРЕД

ТЕМА 4.1.

ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Предавач: Љиљана Врачар (Београд)

1. Ако се неки број увећа за 234, добије се 765. Који је то број?
2. Ако се неки број смањи за 567, добије се 345. Који је то број?
3. Ако се неки број увећа 6 пута добијемо 846. Који је то број?
4. Ако се неки број умањи 7 пута добије се 123. Који је то број?
5. Замишљени број увећан је 8 пута и добијени број је увећан за 8. Који је број замишљен ако је добијен број 800.
6. Збир два броја је 33. Ако први повећамо 6 пута збир ће бити 78. Који су то бројеви?
7. Збир два броја је 99. Који су то бројеви, ако се зна да је један сабирак 10 пута већи од другог?
8. Збир умањеника, умањиоца и разлике је 100. Одреди умањеник и умањилац, ако се зна да је разлика за 16 већа од умањиоца?
9. Одредити два броја таква да је њихов збир 1998, а њихова разлика 100.
10. Збир два броја је 40. Ако саберемо троструки први и двоструки други број збир је 115. О којим бројевима је реч?
11. Збир три броја је 2537. Први је за 1998 већи од другог, а други је 5 пута већи од трећег броја. О којим бројевима је реч?
12. Одредити шест узастопних природних бројева чији је збир 275
13. Збир три узастопна непарна природна броја је 1239. Који су торојеви?
14. Разлика два броја је 51, а њихов количник је 4 и остатак 6. Који су то бројеви?
15. Збир дељеника, делиоца и количника је 69, а збир дељеника и делиоца 56. О којим бројевима је реч?
16. Збир два различита природна броја и њихове разлике је 990. Који су то бројеви?
17. Збир четири узастопна парна природна броја је 1996. Који су то бројеви?
18. Количник два броја је 6, а њихов производ 216. О којим бројевима је реч?
19. Збир 4 броја је 324. Ако се првом дода 5, другом одузме 5, трећи помножи са 5 и четврти подели са 5 онда ће се добити једнаки бројеви. Који су то бројеви?
20. Мира и Вера имају укупно 1500 динара. Вера и Љубинка имају укупно 2500 динара. Љубинка и Борка имају укупно 3500 динара, а Борка има 1500 динара више од Мире. Колико новца има свака од њих?
21. Ако у неком броју изоставимо нулу која се налази на месту јединица, онда је добијени број за 1998 мањи од првобитног. Који је то број?
22. Лека има три пута више новца од Жарка. Ако обојица потроше по 10 динара, та
23. Брат и сестра су понели на излет 250 динара. Брат је потрошио три петине суме, а сестра девет десетина остатка. Колико је новца остало?

24. Три лица поделе 3774 динара тако да прво добије 111 динара мање од другог, а треће добије колико прво и друго лице заједно. Колико новца је добило свако лице?

25. На једном пливачком такмичењу било је 63 учесника. Смештени су тако што су пливачи спавали у трокреветним, а пливачице у двокреветним собама. Колико је било пливача, а колико пливачица, ако је употребљена само једна двокреветна соба мање?

26. На пет полица налази се укупно 300 књига. На првој и другој полици има 120 књига, на другој и трећој 115 књига, на трећој и четвртој 95 књига и на четвртој и петој има 130 књига. Колико књига има на свакој од полица?

27. Збир два броја је 85, а њихов количник је 4. Одредити те бројеве?

28. Ако непознати број смањимо за 225, разлика ће бити мања од збира бројева 320 и 331. Постави неједначину и одреди скуп решења.

29. Ако непознатом сабирку додамо број 27, збир неће бити мањи од броја 62. Постави неједначину и одреди скуп решења.

30. Који број можемо одузети од 9876 да би разлика не буде већа од 876? . Постави неједначину и одреди скуп решења.

31. Зорица има 250 сличица. Од Јелене је добила још неколико сличица и сада има мање од 269 сличица. Колико сличица је Зорица могла да добије од Јелене? . Постави неједначину и одреди скуп решења.

32. Ако непознати број помножимо бројем 17, добијени производ ће бити мањи од броја 2023. Постави неједначину и одреди скуп решења.

33. Ако непознати број поделимо са 7, количник ће бити мањи од разлике бројева 837 и 548. Постави неједначину и одреди скуп решења.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) Половина збира два броја је 30, а разлика њихових трећина је 2. О којим бројевима је реч?

2) Одредити двоцифрени број који се повећа 26 пута ако му се с леве стране допише цифра 7.

3) Ако непознати број смањимо седам пута, количник ће бити већи од разлике бројева 654 и 425. Постави неједначину и одреди скуп решења-

ТЕМА 4.2.

ПРОБЛЕМИ НУМЕРАЦИЈЕ

Предавач: Ивана Пецикоза (Ваљево)

1. Колико знакова (цифара) је потребно за исписивање свих:

   а) једноцифрених природних бројева;

   б) двоцифрених природних бројева;

   ц) троцифрених природних бројева;

   д) четвороцифрених природних бројева?

2. Колико пута се употреби цифра 3 у исписивању свих природних бројева мањих од 1000?
3. Колико цифара је потребно за исписивање свих природних бројева од 1 до 666 ?
4. Колико пута се употреби цифра 0 да би се написали сви четвороцифрени природни бројеви ?
5. Колико цифара је укупно потребно за исписивање:

   а) свих троцифрених бројева већих од броја 234;

   б) свих четвороцифрених бројева мањих од 4321?
6. Колико је цифара потребно за нумерацију књиге која има:

   а) 178 страница;

   б) 2022 странице?
7. Колико је цифара потребно за нумерацију књиге која има 380 листова?
8. Колико цифара се употреби за нумерацију парних страница књиге која има 432 странице?
9. За нумерацију књиге употребљено је 2022 цифара. Колико страница има та књига?
10. Колико цифара 5 се употреби за нумерацију књиге која има 456 страница?
11. Колико листова има књига ако је за нумерисање њених страна уппотребљено тачно 77 седмица?
12. Књига је нумерисан природним бројевима од 1 до 185. Колико пута је употребљена цифра 4?
13. Колико цифара се употреби за исписивање свих природних бројева од 1 до 444?
14. Колико цифара се употреби за исписивање свих природних бројева већих од 50 и мањих од 150? Колико седмица је при том исписивању употребљено?
15. Природни бројеви написани су један за другим у низ тако да се добије број 123456789101112131415161718192021 ... Која цифра је на:

   а) 1000 месту;
   б) 1998 месту;

   в) 2022 месту?
16. Даца је куцала један за другим природне бројеве без размака 1234567891011121314151617181920... и рпи том откуцала 1234 цифре. Колико пута је откуцала цифру:

   а) 1; б) 0?
17. Куће на левој страни улице нумерисане су бројевима 1, 3, 5 … 123, а куће на десној страни улице бројевима 2, 4, 6 .. 178. Колико кућа има у тој улици?
18. Ако се нумерација улице врши у смеру југ – север, онда је Марина кућа нумерисан бројем 88. Ако се нумерација кућа врши у правцу север – југ, онда Марина кућа има број 55. Колико кућа има у тој улици са исте стране са које је Марина кућа?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

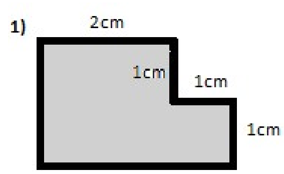
1) Да ли је више знакова (цифара) потребно за исписивање свих природних бројева од 1 до 1000 или од 1001 до 2000 ?
2) Колико цифара се употреби за нумерацију књиге од: а) 567 страна; б) 789 страна?
3) Да ли је 1500 цифара довољно за нумерацију књиге од 532 странице ?

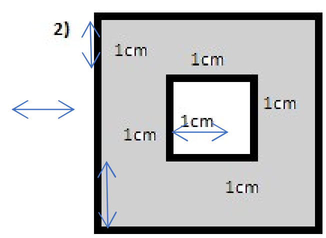
ТЕМА 4.3.

КВАДРАТ И ПРАВОУГАОНИК

Предавач: Маријана Стефановић (Ваљево)

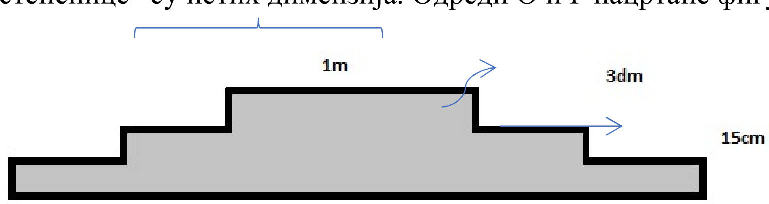
1. Дати квадрат је са две праве подељен на четири мања квадрата од којих сваки има обим 24 cm. Колика је површина тог квадрата ?
2. Квадрат странице 16 cm са две праве подељен је на четири подударна троугла. Колика је површина сваког од тих троуглова ?
3. Од картонских квадрата чије су странице 3 cm и 4 cm изрезивањем и састављањем, без остатка картона, направљен је нови квадрат. Колики су обим и површина тако добијеног квадрата ?
4. Ако се страница квадрата повећа за 3 cm његова површина се повећа за 57 cm^2. Колики је обим првог квадрата ?
5. Игралиште за ватерполо налази се у правоугаоном базену чије су димензије 25 m и 40 m. Колико је метара плуте потребно за обележавање игралишта ако је оно 2 m удаљено од сваке ивице базена ? Колика је површина игралишта за ватерполо ?
6. Обим правоугаоника је 20 cm, а мерни бројеви његових страница су изражене природним бројевима. Који од правоугаоника има највећу, а који најмању површину ?
7. Мерни бројеви страница правоугаоника су два узастопна природна броја, а његова површина је 110 cm^2. Колики је обим тог правоугаоника ?
8. Ако се 1m^2 картона изреже на квадратиће величине 1 cm^2 и сви тако добијени квадратићи поређају један до другог добије се трака ширине 1cm. Колика је дужина те траке?
9. Израчунај обим и површину фигуре са слике.





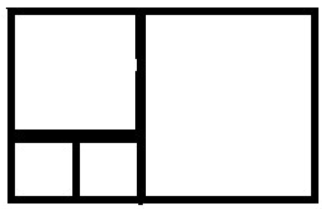
10. Правоугаоник има исти обим као квадрат површине 36 cm^2. Колико има таквих правоугаоника, који нису квадрати, чији су мерни бројеви страница (у центиметрима) цели бројеви?

11. На папиру је нацртана шаховска табла од 64 поља, странице 24 cm. Тој табли одсечена (и одстрањена) су угаона поља. Како се променио обим, а како се променила површина „окрњене" табле у односу на „неокрњену"?
12. На слици све „степенице" су истих димензија. Одреди О и Р нацртане фигуре.



(Сва „газишта" су по 3 dm, а висина свих степеника је 15 cm.)

13. Три картончића, у облику квадрата површине 1 dm^2, постављени су тако да је пресек првог и другог, као и другог и трећег квадратни центиметар. Одреди обим и површину добијене фигуре, ако први и трећи квадрат немају ништа заједничко?
14. Ако се дужина квадрата увећа за 6 cm, а ширина за 5 cm, површина добијеног правоугаоника је за 118 cm^2 већи од површине квадрата. Колики је обим тог квадрата?
15. Када се дужина правоугаоника смањи за 6 cm, ширина за 3 cm, добија се квадрат. Површина квадрата је за 99 cm^2 мања од површине правоугаоника. Одреди обим и површину правоугаоника.
16. На слици су 3 врсте квадрата. Ако је површина најмањег квадрата 16 cm^2 , колика је површина највећег правоугаоника на слици?



ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1. Квадрат странице 3 cm подељен је на квадратне центиметре. Нацртај одговарајућу слику и преброј колико на њој има укупно дужи, а колико квадрата?
2. Ако се страница квадрата повећа за 1 cm, његова површина се повећа за 17 cm^2. Колики је обим првог квадрата?
3. Од једног картонског кавдрата изрезан је други, тако да преостаје оквир који свуда има исту ширину 5 cm. Колика је била површина првобитног квадрата, ако се зна да је збир обима првог и изрезаног квадрата једнак 192 cm?
4. Ако се страница датог квадрата увећа за 10 cm, његова површина се увећа за 200 cm^2. Одредити обим и површину датог квадрата?
5. Дата су два једнака квадрата који имају површину по 100 cm^2. Ако се страница једног квадрата повећа за 2 cm, а обим другога за 16 cm, који ће квадрат после ових измена имати већу површину?

ТЕМА 4.4.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

Предавач: Љиљана Врачар (Београд)

1. Дато је 6 картона облика правоугаоника дужине 3cm и ширине 2cm. Користећи све дате картоне састави један правоугаоник који има:
   а) највећи могући обим б) најмањи могући обим.
2. Једна девојчица ће у 2008. години напунити онолико година колики је збир цифара њене године рођења. Које године 21. века је рођена та девојчица?
3. У једној игри са друговима, Марко је купио 100 бомбона по цени 5 бомбона за 2 динара, а затим их све продао по цени 2 бомбоне за 1 динар. Колико динара је Марко зарадио у игри?

4. Ако је x – 2009= 3434, колико је: а) $(x+2009)-2009$ б) $(x-2000)-2009$

5. У три корпе има 12, 14 и 22 јабуке. Дозвољено је јабуке пребацивати из једне у другу корпу али само тако да из једне корпе пребациш у другу тачно онолико јабука колико у другој већ има. Покажи како са три пребацивања можеш да постигнеш то да у свакој корпи буде једнак број јабука.

6. Велика коцка је састављена од 27 малих жутих коцки и обојена је споља зеленом бојом. Када се боја осушила, Јеротије је раздвојио све мале коцке. Колико ће малих коцки имати :

а) 3 жуте и 3 зелене стране б) 4 жуте и 2 зелене стране

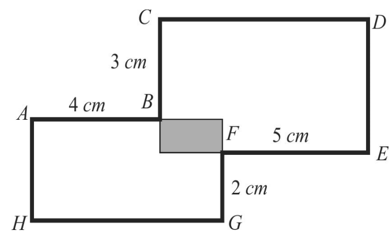
в) 5жутих и 1 зелену страну г) све стране жуте боје?

7. Зграда има три спрата. На другом и трећем спрату живи 20 особа, а на првом и другом спрату живи 22 особе. Колико људи станује на сваком спрату, ако је број особа на другом спрату једнак укупном броју особа на првом и трећем спрату?

8. Колико има четвороцифрених бројева са збиром цифара 4, којима је збир прве две цифре једнак збиру последње две цифре?

9. Три друга Боба, Јова и Мома сакупљају сличице фудбалера. Боба има три пута више сличица од Јове, а Јова два пута више сличица од Моме. Колико сличица има сваки од њих ако Боба и Мома заједно имају 210 сличица?

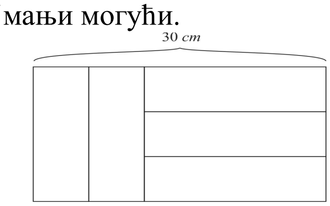
10. Два правоугаоника имају заједнички осенчени део(види слику). Тај део је облика правоугаоника чији је обим 6cm. Ако је AB=4cm, BC=3cm, EF=5cm, FG=2cm, одреди дужину затворене изломљене линије ABCDEFGHA.



11. Кроз неку цев истекне 54 литара воде за 6 минута.
Колико литара воде истече кроз ту цев од 6 сати и 13 минута ујутру до поноћи?

12. Прецртај 6 цифара у низу 2012201220122012 тако да десетоцифрени број који се састоји од преосталих цифара буде: а) највећи могући; б) најмањи могући.

13. Велики правоугаоник је састављен од 5 једнаких мањих правоугаоника (види слику). Ако је дужина веће странице великог правоугаоника 30cm(види слику), израчунај обим једног малог правоугаоника.



14. Борис је замислио неки број. Када га је помножио са 2 добио је број 43598. Одреди број који је 12 пута већи од броја који је Борис замислио.

15. Укупна маса чаше напуњена са водом је 300 грама и једнака је збиру маса две празне чаше и тега од 60 грама. Колика је маса воде у чаши.

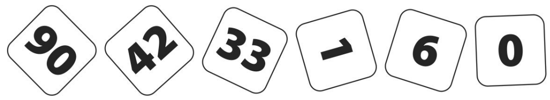
16. У једном селу патуљака живи укупно 60 породица. У селу има само 4 улице. У првој и другој улици живи укупно 30 породица, а у другој и трећој улици живе укупно 32 породице. У четвртој улици живи четвртина броја свих породица.
Колико породица живи у свакој улица?

17. У табели је било записано укупно 15 природних бројева (као чиниоци или производи). Учитељица је избрисала 10 бројева и рекла ученицима да поново тачно запишу избрисане бројеве. Упиши бројеве који недостају,

·			
	35	63	
		99	44
			404

18. Три пријатеља желе да поделе 7 пуних, 7 напуњених до половине и 7 празних чаша лимунаде тако да сваки добије исту количину лимунаде и исти број чаша. Како то могу да ураде а да се не врши пресипање из чаше у чашу?

19. На картонима су записани бројеви као на слици. Спајањем два или три картона могу да се добију, на пример, следећи четвороцифрени бројеви:9042, 1429, 6006, ... Која је највећа разлика два четвороцифрена броја која могу настати спајањем по два или три картона?



20. Сестре Ена и Мила сада имају 12 и 15 година. За осам година њихова мајка ће имати онолико година колико ће имати Ена и Мила укупно. Колико година има њихова мајка сада?

21. Сваком од петоро деце бака је дала једнак број јабука. Када су деца појела по четири јабуке, остало им је укупно онолико јабука колико је добило свако дете на почетку. Колико јабука је добило свако дете?

22. Ана, Бранка и Вера су поделиле међу собом шест карата. На картама су бројеви 1,2,3,4,5,6. Свака је добила по две карте. Збир бројева на Анином картама је 5, на Бранкиним 7, а на Вериним 9. Бар једна од њих добила је карте са узастопним бројевима. Које карте је свака од њих добила?

23. Збир три различита природна броја је 2016.
а) Одреди те сабирке, тако да разлика највећег и најмањег од њих буде највећа могућа.
б) Одреди те сабирке, тако да разлика највећег и најмањег од њих буде најмања могућа.

24. Мајмун Џорџ за доручак поједе неколико банана, за ручак дупло више него за доручак, а за вечеру дупло више него за ручак. Мајмун Џим за доручак поједе дупло више банана него за вечеру, а за ручак три пута више него за вечеру. Њих двојица су једног дана појели сваки по 42 банане. Колико банана је појео Џорџ за ручак, а колико Џим за доручак?

Домаћи задатак

1. Збир цифара неког броја је 6. Прва цифра тог броја је 1, а свака следећа није мања од оне која јој претходи. Одреди сва такве бројеве.

2. У једној сали има 42 столице. Неке имају 3 ноге, а неке 4. Кад на сваку столицу седне по једно дете, у сали има 227 ногу (укупно и дечијих и столица). Колико има столица са 4 ноге?

3. Три друга су за 9 дана урадила 225 задатака. Да је први урадио 47 задатака мање, други 39 задатака мање, а трећи 58 задатака мање, онда би урадили исти број задатака. Колико је свако од њих урадио задатаказа тих девет дана?

ТЕМА 4.5.

ДЕШИФРОВАЊЕ РАЧУНСКИХ ОПЕРАЦИЈА

Предавач: Радиша Ковачевић (Ваљево)

1. У наредним задацима, који се зову математички или бројевни ребуси, уместо звездица треба написати одговарајуће цифре, тако да све операције буду тачно извршене, водећи при том рачуна да се обухвате сва могућа решења. Поступак решавања ребуса назива се и дешифровање:

а) 432** + 5*769 = **1*10

б) 12*45 - 678* = *5*6

в) 2*7 · 4 = *4*

г) *3* : 5 = 2*

д) *23 · ** =

```
  2 0 * 2
+ * * * 1
---------
* * * * *
```

ђ) * * * * : * 2 = 6 * 2

```
* *
---
 * *
 * *
 ---
   0
```

е) 6 7 · * * =

```
   * *
+ * *
------
 * * *
```

ж) * * . * * =

```
   * *
+ * 7
------
 * * * *
```

2. Колико решења има једнакост * * * * * - * = * * * * ?

3. Дешифровати дељење: * * * 1 * : 1 1 = * 9 * .

4. Дешифровати једнакости :
   а) * * · * - * = 1
   б) * * * * : * - * * = 13

5. Одредити 50 природних бројева тако да је њихов збир једнак њиховом производу и једнак броју 100.

6. У наредним задацима уместо слова треба написати одговарајуће цифре, тако да једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре:
   а) ААА + ААБ = ЦАА7
   б) А + АБ + АБЦ + АБЦД = 1992
   в) А + БА + ЦБА + ДЦБА = 1992
   г) А + АА + ААА = ББЦД
   д) ЦАР + ЦАР = КРАЉ

7. Дешифровати једнакости:
   а) АВС + ВСА + САВ = 1998
   б) АВВВ - А = 1998

8. Решити бројевне ребусе :
   а) ААА + ВВВВ = 1999
   б) АААА - ААВ = 1999
   в) АВВВ · А = 1999

9. Збир два броја је 1998. Ако се једном од њих избрише: а) цифра хиљада б) цифра јединица, добија се други број. Који су то бројеви ?

10. Разлика два броја је 1999. Ако се једном од њих избрише цифра јединица, добије се други број. О којим бројевима је реч ?

11. Дешифровати сабирање * * + * * * = * * * * ако се зна да су оба сабирка и збир бројеви који се читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.

12. Дешифровати одузимање * * * * * - * * * * = * * * ако се умањеник, умањилац и разлика читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.

13. Одредити бар једно решење једнакости * * * · * * = * * * * , ако се оба чиниоца и производ читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.

14. Дешифровати једнакост * * * * - * * * = 1999 у којој и умањилац и умањеник имају једнаку вредност било да се читају с лева у десно, било с десна у лево.

15. Одредити три различите цифре A, B и C, тако да је тачна једнакост
A · B · B · B · BC = 1988.
16. Дешифровати следеће множење: * * * * * * * B · B = AAAAAAAAA .
17. Цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 треба распоредити уместо звездица тако да се свака цифра употреби само једном, а да једнакост * + * = * - * = * · * = * * : * буде тачна.
18. Дешифровати следећа сабирања, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима одговарају различите цифре:
    а) B + AAAA + AAAA = BAAAA
    б) A + AA + ABC = CBBA
    в) ABCC + CCBA = ADCEB
    г) AAA + BB + CC = CDAB
    д) A + AB + ABC + ABCD =1CC3
    ђ) A + AB + ABB + ABBC = DDA3
    е) A + AB + BB + ABBB = A995
    ж) ABCD + ABC + AB + A = 4321
    з) AB + ABB + CBBC = BCDC.
19. Дешифровати производ: * * * · 346 = * * * * * 2 , ако се зна да се при множењу првог чиниоца са 4 добија број 154* .
20. Дешифровати разлику: * * * * - * * * = 4. Одредити сва решења, ако свака звездица представља по једну цифру.
21. Уместо * у једнакости * * · * - * = 2 ставити одговарајуће цифре тако да се добије тачна једнакост.
22. Дешифровати сабирање * * * * + * * * = 1998 ако се зна да се оба сабирка читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.

ТЕМА 4.6.

РАЧУНСКЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА

Предавач: Љиљана Врачар (Београд)

1. Разлику бројева 3 000 000 и 963 777 повећај за збир бројева 98765 и 6543.
2. Једна фабрика је произвела 12 489 пари ципела, а друга за 4 827 пари више. Колико су пари ципела произвеле обе фабрике?
3. Прву кошаркашку утакмицу у сезони пратило је 6 045 гледалаца, другу за 2 587 гледалаца мање, а трећу 805 гледалаца више него другу. Колико је укупно гледалаца пратило све три утакмице?
4. Јакна кошта 8 645 динара, џемпер је за 3 896 динара јефтинији, а панталоне за 1 085 динара скупље од џемпера. Колико укупно коштају јакна, џемпер и панталоне?
5. У рибњаку има 2 605 шарана, пастрмки за 886 више, а сомова за 1 075 мање него шарана и пастрмке заједно. Колико је укупно рибе у рибњаку?
6. Допиши један пар заграда тако да буде тачна једнакост: $2021 \cdot 287 - 2009 : 7 = 0$
7. Израчунај 209 · 208 – 208 · 207 – 2 · 207.

8. Бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 напиши у поља квадратне таблице 3x3 тако да је производ бројева у једном реду једнак броју који је написан са десне стране тога реда, а производ бројева у једној колони једнак броју који је написан испод те колоне (види слику).

			20
			108
			168
42	80	108	

9. Дешифруј множење: $AAA \cdot B = 1998$.

10. Зграда има три спрата. На првом и другом спрату живе укупно 22 особе, а на другом и трећем спрату живи 20 особа. Колико људи станује у тој згради ако ако је број особа на другом спрату једнак укупном броју особа на првом и трећем спрату.

11. Збир два броја је 52. Ако се први увећа 11 пута, збир ће бити 152. О којим бројевима је реч?

12. Пера је требао дати број да помножи са 15 и сабере са 4. Међутим, он је непознати број помножио са 4 и сабрао га са 15. Занимљиво је да се у оба случаја добије исти резултат. Који број је дат?

13. Неки број називамо срећним ако се између његових цифара могу уметнути знаци рачунских операција и заграде тако да вредност добијеног израза буде 100. На пример број 98751 је срећан број јер је $9 \cdot 8 + 7 \cdot (5 - 1) = 100$). Да ли је број 123456 срећан број?

14. Између цифара у изразу $9 \cdot 8 \mid 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad 3 \cdot 2 \quad 1 = 1995$ поставити заграде тако да се добије тачна једнакост.

15. Одредити пет природних бројева чији је збир 20, а производ 420.

16. Број 30 напиши као вредност три бројевна израза од којих сваки садржи по три исте цифре. Дозвољено је коришћење свих рачунских операција, заграда и слепљивање цифара.

17. Колико најмање, а колико највише сабирака садржи једнакост $AB + AB + ... + AB = 525$?

18. Дешифруј множење $AA \cdot AB = 550$.

19. У наредну таблицу уписати недостајуће бројеве тако да збир свака три суседна броја буде једнак

	345				222				876	

20. Одреди разлику највећег и најмањег седмоцифреног парног броја написаног помоћу цифара 0, 3, 5, 7 и 8 у коме се ниједна цифра не појављује више од два пута.

21. Дати су бројеви 35246, 42385, 45263 и 75234, Ако у сваком од тих бројева цифре 4 и 5 замене места који од бројева ће се највише увећати и за колико?

22. Збир шест различитих природних бројева је 22. Одреди о којим бројевима је реч?

23. За природна бројеве a, b и c важи једнакост $a - b + c = 2021$. Колико ће бити вредност израза ако се сваки од бројева: а) повећа за 333; б) умањи за 444.

24. Влада, Нада и Јагода су били у куповини. Влада и Нада су потрошили 2021 динар, Влада и Јагода 3022, а Нада и јагода 4023 динара. Колико новца је потрошио свако од њих?

25. Имамо лењир дужине 9 *cm* на коме нема обележених подеока. Како треба обележити само три подеока познате дужине, тако да се помоћу лењира могу измерити све дужи чије су дужине природни бројеви од 1 *cm* до 9 *cm* ?

26. На игралишту има босоногих дечака исто колико девојчица у патикама. Да ли је на игралишту више босоноге деце или девојчица?

27. Збир три узастопна природна броја је x, а збир следећа три узастопна броја је y. Може ли производ x и y бити 111 111 111?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1. Када је један број прво увећан за 17200, па затим умањен за 8620, добијен је број 88888. О ком броју је реч?

2. У две кутије је подељено 3452 кликера тако да их у свакој буде исти број. Петар је узео 192 кликера тако да је из једне кутије узео три пута више него из друге. Колико је кликера остало у једној, а колико у другој кутији?

3. Дешифровати (AA + AA + 1) · A = AAA.

ТЕМА 4.7.

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА МЕТОДОМ ИЗРАЧУНАВАЊА

Предавач: Верица Марковић (Београд)

1. Брат и сестра су пре 15 година имали заједно 15 година. Колико година ће имати заједно за 15 година ?

2. Три радника ураде неки посао за 10 сати. За колико сати ће исти посао урадити пет радника ?

3. Мира је за 7 кг јагода платила исто колико и за 9 кг трешања. Колико коштају јагоде, ако је килограм јагода за 4 динара скупљи од килограма трешања ?

4. На једној позоришној представи било је 91 гледалаца. Колико је било мушкараца, а колико жена ако на сваких 5 мушкараца долази 8 жена ?

5. У једној основној школи на свака два дечака има три девојчице, а на сваких десет дечака има један наставник. Колико има у тој школи ученика, а колико наставника, ако је у тој школи укупно 312 ученика и наставника ?

6. Милан је пошао за Јованом, који се налазио 30 м, испред њега. Миланов корак има дужину 85 цм, а Јованов 75 цм. Колико корака треба да направи Милан да би стигао Јована ?

7. Новчаницу од 100 динара треба разменити новчаницама од 2 динара и 5 динара, тако да укупно буде 32 новчанице. Колико којих новчаница има ?

8. Растојање од страта до циља износи 120 м и ној га претрчи за 12 секунди. Исто растојање коњ претрчи за за 10 секунди, а антилопа за 6 секунди. Ако трчећи сви истовремено стигну на циљ, на ком је растојању од циља био свако од њих на почетку трке ?

9. У једном кавезу су били зечеви и фазани при чему је избројано укупно 200 ногу и 70 глава. Колико је било зечева, а колико фазана ?

10. На тесту из математике требало је решити 10 задатака. За сваки решен задатак добија се 4 бода, а за сваки нерешен задатак ученик губи 3 бода. Колико задатака је тачно решио ученик ако је на крају имао 19 бодова ?

11. За 3 кг брашна и 5 кг шећера плаћено је 65 динара, а за 9 кг брашна и 20 кг шећера плаћено је 245 динара. Колико кошта 10 кг брашна и 15 кг шећера ?

12. Један возач је својим аутомобилом прешао 200.000 км и при том је сваки од 5 точкова (4 погонска + резервни) прешао једнак број километара. Колико километара је прешао сваки точак ?

13. Три гуске за 4 дана снесу 10 јаја, Колико јаја снесу 7 гуска за 6 дана?

14. Збир три узастопна непарна природна броја износи 105. Који су то бројеви ?

15. Производ три броја је 270. Који су то бројеви, ако се зна да је производ првог и трећег једнак 30, а производ другог и трећег је 135 ?

16. Дужина пута између места А и В је 595 км. У 7 сати ујутру, истога дана, пођу из ова два места један другом у сусрет камион и аутомобил. Сваког сата камион прелази 45 км, а аутомобил 60 км . После тачно 3 сата вожње направе паузу од 30 минута, а затим истом брзином наставе пут даље. Колико су били удаљени један од другог камион и аутомобил у 13 сати и 30 минута ?

17. Два дечака возе бицикле. Млађи сваког минута прелази 120 метара, а старији 150 метара. После колико минута ће старији дечак стићи млађег, ако је млађи пошао један минут раније ?

18. Воз дужине 500 м, иде брзином од 60 км на час. Колико ће му требати времена да прође кроз тунел дужине 1000 м ако се време проласка рачуна од тренутка уласка локомотиве у тунел до тренутка изласка последњег вагона из тунела ?

19. Аца је дао половину свог новца Мићи, а затим је Мића дао Аци трећину суме коју је у том тренутку имао. Ако су на крају обојица имали по 80 динара, колико је новца имао свако од њих на почетку ?

20. У једном граду у главној улици у правој линији су школа, пошта и биоскоп. Од школе до поште је 1 км и 215 м, а растојање између школе и биоскопа је за једну трећину краће. Колико је растојање између поште и биоскопа.

21. Ученик је требао да израчуна производ бројева 5267 и * 3 *. Међутим, приликом записивања чинилаца уместо цифре 3 грешком је записао цифру 8. За колико је добио већи производ ?

22. Трактор пређе пут дужине 1 м ако му предњи точак направи 1 обртај, а 4 м ако му задњи точак направи 1 обртај. Колики је пут прешао трактор, ако је на том путу предњи точак трактора направио 39 обртаја више од задњег точка?

23. Влада је свом сину Николи једног дана поклонио један кликер. Сутрадан му је поклонио 3 кликера, трећег дана 5 кликера и сваког следећег дана за два кликера више него претходног дана. Колико кликера је Никола добио тридесетог дана ? Колико је укупно кликера Никола имао на крају тридесетог дана?

24. Дати су бројеви 87 и 54. За колико се разликују њихов двоструки збир и њихова трострука разлика ?

25. Пешак је прешао 24 км за неколико часова. Колико километара би прешао бициклиста ако би утрошио два пута више времена него пешак и ако би сваког сата прелазио три пута већи пут ?

26. Ако се са 120 кг сена 5 оваца може хранити 8 дана, колико је сена потребно да се стадо од 80 дана храни 15 дана ?

27. Збир три броја је 230. Збир првог и другог је 80, а збир првог и трећег је 180. Одредити те бројеве

28. Два дечака возе бицикле. Млађи сваког минута прелази 120 метара, а старији 150 метара. После колико минута ће старији дечак стићи млађег, ако је млађи пошао један минут раније ?

ЗИМСКА ШКОЛА
МЛАДИХ
МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО


5. РАЗРЕД

ТЕМА 5.1.

СКУПОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ И ПРИМЕНА СКУПОВА

Предавач: Маријана Стефановић (Ваљево)

1. Дати су скупови: $A = \{x \mid x \in N \text{ и } x < 8\}$ и $B = \{y \mid y \in N \text{ и } 3 \leq y \leq 7\}$.Одреди скупове:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Дати су скупови: $A = \{a \mid a \in N \text{ и } a \leq 7\}$ и $B = \{b \mid b \in N \text{ и } 4 < b < 9\}$. Одреди елементе скупа C, ако је $C = \{c \mid c \in N \text{ и } c = a - b,\ a \in A \text{ и } b \in B\}$.

3. Одредити скуп X ако је $\{1, 2, 3\} \cap X = \{2, 3\}$ и ако је $X \subset \{2, 3, 4, 5\}$. Одредити сва могућа решења.

4. Одредити бројеве x и y ако је $\{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{x, y, 2, 3, 5\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

5. Одредити елементе скупа N ако је: $M / N = \{6,8\}$; $P / N = \{2,3\}$; $M \cap P = \varnothing$;
$M \cup N \cup P = \{x \mid x \in N \text{ и } x < 10\}$

6. Дати су скупови : $A = \{a,b,c,d\}$,$B = \{a,d,e,f\}$,$C = \{b,e,f,g\}$. Одредити скуп S тако да је: $S \subset A$, $(A \cap B) / S = \varnothing$,$(A \cap C) / S = \varnothing$, $\{c\} / S = \{c\}$.

7. Нека је $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$,$(A \cup B) \cap C = \{1,4\}$,$B / C = \{2,5,6\}$ и

$C / A = \varnothing$. Одредити скупове A, B и C .

8. Дати су скупови : $A = \{x \mid x \in N \text{ и } x \leq 7\}$,$B = \{y \mid y \in N \text{ и } 5 \leq y < 9\}$,

$C = \{z \mid z \in N \text{ и } 2 < z \leq 6\}$. Одредити $(A \cap B) / C$.

9. Одреди елементе скупова A, B и C ако је : $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A \cap B = \{5,6,7\}$, $A/C = \{1,2,6,7\}$, $B/(A \cup C) = \{8,9\}$, $B \cap C = \{3,5\}$.

10. Дати су скупови A, B и C такви да ј $A \cap B \cap C = \varnothing$. Ако скуп A / B има 7 елемената, скуп C $/$B има 8 елемената, скуп A∩C има 2 елемента и $A \cup B \cup C$ има 20 елемената, колико елемената има скуп B?

11. На писменој вежби из математике постављена су 3 задатка. Сваки ученик решио је бар један задатак, а нико није решио трећи задатак. Први задатак решило је 25 ученика, а други 27 ученика. Њих 20 је решило оба задатка. Колико је ученика радило вежбу ? Колико ученика је решило само први задатак?

12. У једном педузећу има 35 радника. Њих 20 говори стране језике, а 11 зна стенографију, а 10 не зна ни једно ни друго. Колко радника зна и стенографију и стране језике ?

13. Одређени број ученика летовао је у Будви, Бару и Улцињу. При томе, 3 ученика је посетило само Бар, 6 сва три места, 5 само Будву, 10 Бар и Улцињ, 8 Бар и Будву, 12 Улцињ и Будву, а 7 само Улцињ. Колико је ученика летовало ? Које место је било највише а које најмање посећено ?

14. Десет ученика је одговарало математику, биологију и хемију. Четворо је одговарало биологију, петоро хемију, а шест ученика математику. Један од њих је одговарао сва три предмета, а по два ученика само по један предмет. Колико је ученика одговарало тачно два предмета?

15. Сви ученици једног одељења су чланови барем једне од секција: кошаркашке , рецитаторске или математичке. У све три секције учлањено је 6 ученика, 6 ученика су чланови по две секције, а по 6 ученика су чланови само по једне секције. Колико ученика има у том одељењу ?

16. Од 70 ученика 5. разреда 27 су чланови драмске секције, 32 пева у хору, а 22 се бави спортом. У драмској секцији има 16 чланова хора, а у хору пева 6 спортиста, док је 8 спортиста у драмској секцији. Три ученика су чланови све три секције. Колико ученика није ни у једној секцији, а колико ученика се бави само спортом?

ТЕМА 5.2.

РАЗЛОМЦИ - ПРОШИРИВАЊЕ, СКРАЋИВАЊЕ И УПОРЕЂИВАЊЕ

Предавач: Љиљана Врачар (Београд)

1. Скрати разломак $\frac{96}{320}$.
2. Шта је веће: $\frac{13}{14}$ или $\frac{15}{16}$; б) $\frac{60}{61}$ или $\frac{10}{11}$?
3. Упореди разломке: $\frac{76}{79}$ и $\frac{71}{74}$.
4. Одреди разломак једнак разломку $\frac{3}{7}$, тако да је збир његовог бројиоца и имениоца једнак 130.
5. Одреди све природне бројеве n ако је: $\frac{1}{3} < \frac{n}{5} < \frac{6}{7}$.
6. Одреди све просте бројеве p за које важи: $\frac{2}{27} < \frac{3}{p} < \frac{4}{7}$.
7. Разломак $\frac{5}{11}$ је настао скраћивањем разломка код кога је разлика имениоца и бројиоца једнака 66. Који је то разломак?
8. Одреди разломак једнак разломку $\frac{2}{3}$, тако да је производ бројиоца и имениоца једнак 150
9. Зашто разломак $\frac{67}{37}$ не може да се скрати?
10. Скрати разломак $\frac{202220222022}{202320232023}$.

11. Шта је веће: $\frac{13}{56}$ или $\frac{65}{279}$; б) $\frac{667}{668}$ или $\frac{2005}{2008}$?

12. Упореди разломке: $\frac{77777777772}{77777777777}$ и $\frac{88888888883}{88888888888}$.

13. Одреди разломак једнак разломку $\frac{5}{9}$, тако да је збир његовог бројиоца и имениоца једнак 126.

14. Одреди све природне бројеве n ако је: $\frac{1}{3} < \frac{n}{12} < \frac{3}{4}$.

15. Одреди све просте бројеве p за које важи: $\frac{8}{63} < \frac{1}{p} < \frac{2}{5}$.

16. Разломак $\frac{5}{11}$ је настао скраћивањем разломка код кога је разлика имениоца и бројиоца једнака 678. Који је то разломак?

17. Одреди разломак једнак разломку $\frac{5}{4}$, тако да је производ бројиоца и имениоца једнак 180.

18. Именилац једног разломка је за 2 већи од бројиоца. Одреди тај разломак, ако се зна да када се и од бројиоца и од имениоца одузме 1 добије се разломак једнак $\frac{1}{2}$.

19. Скрати разломак $\frac{123441}{123464}$.

20. Зашто разломак $\frac{654338}{654321}$ не може да се скрати?

21. Одреди све двоцифрене природне бројеве x за које разломак $\frac{5x+72}{x}$ може да се скрати.

22. Израчунај $\frac{2008+4015\cdot 2007}{2008\cdot 4015-2007}$.

23. Ако и бројилац и именилац разломка $\frac{175}{394}$ умањимо за исти број, добије се разломак $\frac{1}{4}$. Који је то број?

24. Који од разломака $\frac{3*5*}{36}$ и $\frac{5*3*}{45}$ је већи?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Који од разломака $\frac{1}{181}$ и $\frac{3}{4}$ је већи?

2) Замени звездице цифрама тако да буде тачна једнакост $\frac{3*}{5*} = \frac{2}{3}$. Нађи сва решења.

3) Одреди бар пет разломака већих од $\frac{3}{4}$, а мањих од $\frac{4}{5}$.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО

ТЕМА 5.3.

ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ
У СКУПУ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

Предавач: др Војислав Андрић (Ваљево)

1. Дешифровати одузимање * * * * * - * * * * = * * * ако се умањеник, умањилац и разлика читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.
2. Колико решења има једначина $x + y = 2000$, ако су x и y природни бројеви?
3. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $100x + 2y = 202$.
4. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $15x + 40y = 1999$?
5. Одредити сва решења једначине $x^2 + 2y = 24$, ако су x и y природни бројеви.
6. Колико решења има једначина $x \cdot yy = 96$, ако су x и y природни бројеви?
7. Одредити сва решења једначине $x^2 \cdot y = 48$.
8. Одредити сва решења једначине $x^2 \cdot y^3 = 72$.
9. Одредити шест природних бројева чији је збир једнак њиховом производу.
10. Постоји ли десет природних бројева таквих да је њихов збир једнак њиховом производу и једнак броју 20?
11. Дешифровати множење: $x \cdot y \cdot 45 = 2\,2\,*\,*$.
12. Одредити сва решења једначине $x \cdot y = 49$, $x \cdot y = p^2$, ако су x и y природни, а p прост број?
13. Колико решења има једначина $x \cdot y = 256$, $x \cdot y = p^{10}$, ако су x и y природни, а p прост број?
14. Постоји ли квадар чија је површина 987654321 ако су мерни бројеви његових ивица природни бројеви?
15. Постоји ли природан број чији је производ цифара једнак 2000? Одредити најмањи такав природан број.
16. Колико решења има једначина $\frac{x}{4} = \frac{5}{y}$, ако су x и y природни бројеви?
17. Колико решења има једначина $\frac{x}{3} - \frac{y}{8}$, ако су x и y природни бројеви?
18. Колико решења у скупу природних бројева има једначина $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$.
19. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $p + q = 99$.
20. Колико решења у скупу простих бројева има једначина $p \mid q = 30$?

21. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $2p + 3q = 200$.

22. Колико решења има једначина $3p + 5q = 100$, ако су p и q прости бројеви?

23. Одредити сва решења једначине $5p - 7q = 1$, ако су p и q прости бројеви?

24. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $\frac{p}{2} + \frac{q}{3} = 2$.

25. За које вредности природног броја n једначина $\frac{p}{2} + \frac{q}{3} = n$ има решења, ако су p и q прости бројеви?

26. Цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 треба распоредити уместо звездица тако да се свака цифра употреби само једном, а да једнакост * + * = * - * = * · * = * * : * буде тачна.

27. Одредити најмањи и највећи природан број чије су све цифре различите који има производ цифара 720.

28. Колико решења има једначина $p^3 + 3^p = q$, ако су p и q прости бројеви.

29. Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли површина коцке бити 1234? Може ли запремина коцке бити 432?

30. а) Колико решења у скупу природних бројева има једначина $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$.

    б) Доказати да једначина $\frac{p}{4} + \frac{q}{15} - n$ нема решења, ако су p и q прости бројеви, а n природан број.

Домаћи задатак

1) Колико решења у скупу природних бројева има једначина $2x + y = 34$?

2) Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $3x + 9y = 2023$?

3) Одредити сва решења једначине $2x \cdot x + 3y = 38$ ако су x и y природни бројеви.

ТЕМА 5.4.

УГАО

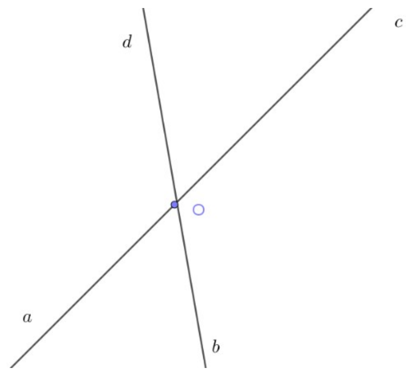
Предавач: Ивана Андрејић (Чачак)

1. Израчунај угао α који је 8 пута већо од свог: а) комплементног угла β; б) упоредног угла γ.

2.Израчунај угао који је а) суплементан својој осмини; б) комплементан својој петини.

ЗИМСКА ШКОЛА
МЛАДИХ
МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО

3. Израчунај углове $\measuredangle aOb, \measuredangle bOc, \measuredangle cOd, \measuredangle dOa$ (на слици) ако је $\measuredangle aOd + \measuredangle aOb + \measuredangle bOc = 298^\circ$.



4. Израчунај углове $\measuredangle aOb, \measuredangle bOc, \measuredangle cOd, \measuredangle dOa$ (на слици) ако је $\measuredangle aOb + \measuredangle cOd = \measuredangle dOa$.

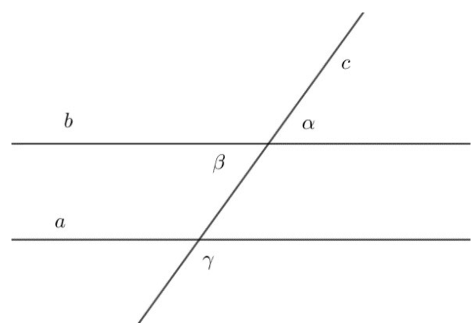
5. Израчунај углове $\measuredangle aOb, \measuredangle bOc, \measuredangle cOd, \measuredangle dOa$ (на слици) ако је

$\measuredangle aOd + \measuredangle bOc = 3(\measuredangle aOb + \measuredangle cOd)$.

6. Петина угла α једнака је седмини њему суплементног угла β. Колики је угао γ који се комплементан углу α ?

7. Разлика два упоредна угла α и β једнака је половини оштрог угла γ. Доказати да је угао комплементан са β једнак четвртини угла γ.

8. Израчунај углове на паралелним правава *a* и *b*, ако је збир углова α, β и γ једнак 222°.



9. Угао α је већи од свог комплементног угла тачно за онолико за колико је мањи од свог суплементног угла. Израчунати угао α.

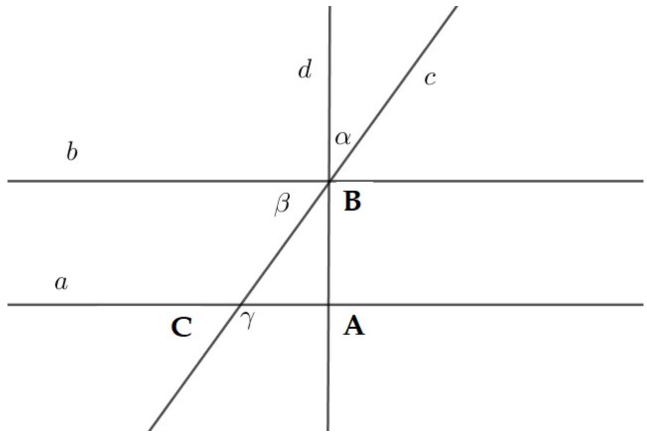
10. Угао α = $1980'$. Израчунати угао β који је комплементан са углом α и угао γ који је суплементан са α.

11. Збир угла комплементног датом углу α и збир угла суплементног датом углу α је једнак је четвороструком углу α. Колики је угао α ?

12. Дат је угао α = 160°. Дати угао је подељен на четири дела тако да је први два пута већи од другог, други четири пута већи од четвртог,а трећи три пута већи од четвртог. Израчунати колико износи сваки од тих углова.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Праве *a* и *b* су паралелне, *a* права *d* је нормална на праве *a* и *b* и сече их редом у тачкама A и B. Права *c* садржи тачку B и пресеца праву *a* у тачки *c* (види слику). Одреди све углове у тачкама A, B и C, ако је $\alpha + \beta + \gamma = 234^\circ$.



2) Два суплементна угла се разликују за 44°. Израчунај угао који је комплементан са мањим од њих.

3) Дат је угао α. Ако су α и β суплементни углови, а β и γ комплементни углови, израчунати: а) разлику углова α и γ ; б) угао суплементан углу γ (у функцији од α).

ТЕМА 5.5.

СКУПОВИ ТАЧАКА У РАВНИ

Предавач: Ивана Пецикоза (Ваљево)

1. На једној правој дато је 17 тачака. Колико правих, колико дужи, а колико полуправих, на тој правој одређују задате тачке?
2. Колико најмање, а колико највише правих може одредити 5 тачака?
3. Колико троуглова одређује 5 тачака?
4. Који је најмањи број тачака којима је одређено 36 правих?
5. Колико дужи а колико квадрата има на шаховској табли?
6. Може ли се 2023 тачке распоредити тако да одређују тачно 2023 праве?
7. Који скупови тачака могу бити пресек једне праве и једне кружнице, а шта једне праве и једног круга?
8. На колико највише делова могу три праве поделити један круг?

9. Дате су две кружнице чији су полупречници 2 *cm* и 5 *cm*. Колико је растојање између центара ових кружница, ако се кружнице:
   а) секу;
   б) додирују;
   в) немају заједничких тачака?

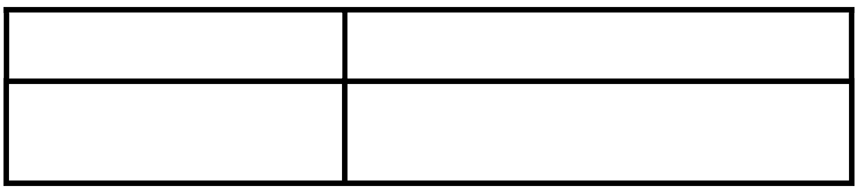
10. Шта све може бити пресек две кружнице, а шта два круга?

11. Дате су две кружнице чији су полупречници 3 *cm* и 5 *cm*. Какав је њихов међусобни положај, ако су њихови центри удаљени:

   а) 1 cm; б) 2 cm; в) 4 cm; г) 8 cm; д) 10 *cm*?

12. Шта све може бити пресек скупова тачака два квадрата? Илустровати.

13. Правоугаоник је помоћу две праве подељен на 4 правоугаоника (види слику). Колико укупно правоугаоника се може уочити на слици? Колики је обим највећег правоугаоника на слици, ако је збир обима свих правоугаоника 768 cm.



14. На једној правој дате су редом тачке тачке A, B, C и D. Дужина дужи AD = 14cm, а растојање између средишта дужи AB и CD једнако је 10cm. Одредити дужину дужи BC.

15. Дата дуж AE подељена је трима тачкама на 4 неједнака дела. Растојање средишта унутрашњих делова је 8cm, а растојање средишта крајњих делова је 24cm. Колика је дужина дате дужи?

16. Једна дуж је три пута дужа од друге, а њихова разлика је дужине 16cm. Одредити дужине тих дужи.

17. Тачке A, B и C су колинеарне, при чему је тачка B између тачака A и C. Одредити растојање између средишта дужи AB и BC, ако је дужина дужи AC је 14cm.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1. Колико најмање, а колико највише правих може одредити 9 различитих тачака?

2. Колико има квадрата на шаховској табли ако се окрње два угаона поља?

3. Једна дуж је подељена на 4 дела, тако да је други део два пута дужи од првог, трећи део три пута дужи од првог, а четврти део два пута дужи од другог. Растојање између средишта првог и другог дела је 3cm. Одредити дужину ове дужи.

ТЕМА 5.6.

ДЕЉИВОСТ И ПРОСТИ БРОЈЕВИ

Предавач: Александра Милошевић (Нови Сад)

1. Постоји ли природан број чији је производ цифара 22?
2. Да ли је број 1234567890 дељив са 9?
3. Да ли тачно тврђење: Број је дељив са 8 ако је дељив са 2 и 4?
4. Одреди најмањи и највећи четвороцифрени број који је дељив са 2, 5 и 9.
5. Одреди најмањи природан број који је дељив са 27 а чији је збир цифара 27.
6. Дата су четири тврђења: А: број *a* је дељив са 24: Б: број *a* је дељив са 4; В: број *a* је дељив са 12 Г: број *a* је дељив са 2
7. Познато је да су од датих три тврђења три тачна, а једно није и да је *a* мањи од 100. Одреди све такве бројеве
8. Производ два природна броја од којих ни један не садржи цифру 0, је 100000. О којим бројевима је реч?
9. Нађи све цифре *a* и *b* тако да број $\overline{123ab}$ буде дељив са 36. Колико има решења?
10. Дешифровати множење $*3*\cdot 45 = 5*4*$.
11. Производ пет узастопних природних бројева је $95*4*$. Одреди непознате цифре и узастопне бројеве.
12. Нека је *n* најмањи природни број којим треба помножити 2520 да би се добио квадрат природног броја. Колики је збир цифара броја *n*?
13. Колико има четвороцифрених бројева који почињу цифром 2, завршавају се цифром 4 и дељиви су са 9?
14. Одреди највећи троцифрен број који при дељењу са 3,4,5,6 даје редом остатке 2,3,4,5 .
15. Одредити три цифре, тако да сви троцифрени бројеви који се могу образовати буду прости.
16. Ставите цифре уместо * тако да број :а) $\overline{4*1*}$ буде дељив са 12: б) $\overline{81**}$ буде дељив са 90 .
17. При дељењу неког броја са 52 добија се остатак 39. Да ли је дати број дељив са 13?
18. Производ два природна броја је 384, а њихов НЗС је 48. Одреди те бројеве.
19. Одреди све природне бројеве који при дељењу са 7 дају остатак 2 , при дељењу са 9 остатак 4 и при дељењу са 12 остатак 7.
20. У броју 92*58 одреди непознату цифру * тако да добијени број буде дељив са 11.
21. Распореди на кругу 4 јединице, 3 двојке и 3 тројке тако да збир свака три узастопна броја не буде дељив са 3.
22. За неке природне бројеве a и b важи да је $3a + 2b$ дељиво са 23. Докажи да је тада и број $49a + 48b$ дељив са 23.
23. Колико најмање и колико највише једнаких троцифрених бројева треба сабрати да би добијени збир био 2023?

ТЕМА 5.7.

САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ РАЗЛОМАКА

Предавач: Марија Стевановић (Чачак)

1. Упореди разломке: $\frac{19}{98}$, $\frac{1919}{9898}$ и $\frac{191919}{989898}$.
2. Шта је веће: $\frac{5}{3}$ или $\frac{27}{16}$?
3. Скратити разломак $\frac{202320232023}{202420242024}$.
4. Одреди све природне бројеве n за које важи: $\frac{1}{3} < \frac{n-1}{5} < \frac{11}{12}$.
5. Одреди све просте бројеве p за које важи: $\frac{8}{63} < \frac{1}{p} < \frac{2}{5}$.
6. Одреди разломак једнак разломку $\frac{5}{9}$ тако да је збир његовог бројиоца и имениоца једнак 126.
7. Одреди разломак једнак разломку $\frac{5}{4}$ тако да је производ његовог бројиоца и имениоца једнак 180.
8. Који број треба одузети од бројиоца и додати имениоцу разломка $\frac{57}{23}$, да се добије разломак једнак $\frac{3}{5}$?
9. Именилац разломка $\frac{4}{7}$ је увећан за 28. За колико треба увећати бројилац да се разломак не промени?
10. Која два разломка са двоцифреним имениоцима имају збир једнак $\frac{103}{2002}$?
11. Одреди три разломка чији су имениоци прости бројеви ако је збир тих разломака $\frac{53}{30}$
12. Одреди једноцифрене бројеве a, b и c тако да је $\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}$.
13. Одреди природан број n и прост број p тако да важи $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$. Колико различитих решења има проблем?
14. Бројеве x = 2,22222…, y = 3,45454545... и z = 7,893893893… написати у облику разломка $\frac{a}{b}$.
15. Дат је разломак $\frac{79}{33}$. Одреди која цифра се налази на 2023. месту иза децималног зареза у децималном запису датог разломка.
16. Решити једначину $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}} = 2007 \cdot$
17. Израчунај збир $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{9\cdot 10}$.
18. Збир половине, трећине и седмине неког броја је за 1 мањи од тог броја. Који је то број?

19. Именилац једног разломка је за 2 већи од бројиоца. Одреди тај разломак, ако се зна да када се и од бројиоца и од имениоца одузме 1 добије се разломак једнак $\frac{1}{2}$.

20. Дати су разломци $a = \frac{12}{25}$ и $b = \frac{37}{73}$. Увери се да важи неједнакост: $a < \frac{a+b}{2} < b$. Да ли дата неједнакост важи само за дате бројеве a и b, или важи за све бројеве a и b, за које је $a < b$?

21. У празна поља (види слику) уписати разломке тако да збирови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

		$\frac{4}{5}$
$\frac{7}{10}$		
		0,4

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Упореди разломке: $\frac{98}{987}$ и $\frac{987}{9876}$.

2) Одреди разломак једнак са $\frac{7}{13}$, код кога је збир бројиоца и имениоца једнак 140.

3) а) Разломак $\frac{999}{1994}$ представи као збир два разломка се једноцифреним бројиоцима.

б) Одреди два разломка се двоцифреним имениоцима, тако да је њихов збир $\frac{145}{1998}$.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО


6. РАЗРЕД

ТЕМА 6.1.

ДИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП

Предавач: др Војислав Андрић (Ваљево)

1. Ако 4 дечака имају 18 кликера, шта са сигурношћу можемо тврдити?

2. Ако у 7 кутија има 150 куглица, шта се може закључити?

3. Дато је 9 природних бројева. Можемо ли тврдити да су бар 5 исте парности?

4. Да ли је тачно да ако 11 зечева треба распоредити у 3 кавеза, онда постоји кавез у коме се налазе бар 4 зеца?

5. Дато је 999 произвољних простих бројева. Докажи да се бар 250 датих простих бројева завршава истом цифром. Да ли тврђење важи за 998 простих бројева ?

6. Основну школу “Милован Глишић” у Ваљеву похађа 1234 ученика. Докажи да у тој школи: а) бар 4 ученика славе рођендан истог дана; б) бар два ученика имају исте иницијале.

7. У једном одељењу има 30 ученика, који су радили контролну вежбу из математике. Наставник је прегледао контролну вежбу из математике и утврдио да је највећи број грешака на контролној вежби седам. Докажи да постоје бар 4 ученика који имају исти број грешака.

8. На ширем подручју града Београда живи око 2 000 000 становника. Сваки становник у својој коси има највише 300 000 власи косе. Докажи да у граду Београду живи бар 7 становника који имају исти број власи косе на глави.

9. У једнакостраничном троуглу ABC странице 3 cm на случајан начин је распоређено 10 тачака. Докажи да при сваком распореду датих тачака постоје бар две тачке чије растојање је мање од 1 cm.

10. У квадрат чија је страница 5 cm на случајан начин су размештене 52 тачке. Доказати да постоји троугао чија су темена дате тачке и чија је површина мања од 1 cm^2.

11. Правоугаоник чије странице имају дужину 5cm и 9 cm подељен је на 10 мањих правоугаоника тако да су мерни бројеви страница добијених правоугаоника природни бројеви. Докажи да међу добијеним правоугаоницима постоје бар два чије су површине једнаке.

12. Група од 18 дечака је добила 150 кликера. Могу ли поделити кликере тако дасваки добије бар један кликер и да сваком од њих припадне различит број кликера?

13. Међу 100 произвољних природних бројева постоји бар 34 броја која при дељену са 3 имају исти остатак. Докажи.

14. У кутији се налази 10 белих и 7 црвених куглице. Колико најмање куглица треба узети из кутије (без гледања), да би међу њима сигурно биле 3 црвене куглице ?

15. Шест градова су повезани било аутобуским било железничким линијама. Докажи да ма какав распоред линија био, увек постоје три града која су повезана линијама исте врсте.

16. Тепих димензија 4 m x 4 m прогризли су мољци и направили 15 рупа занемарљиве величине. Може ли се исећи комад тепиха димензија 1 m x 1 m на коме нема рупа?

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА ЧАЧАК 2023.
Математички клуб Диофант Ваљево

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) На општинском такмичењу из математике учествује 123 ученика од 4. до 8, разреда. Докажи да је број такмичара бар у једном разреду већи од 24.
2) Докажи да се од произвољних 6 целих бројева могу изабрати два чија је разлика дељива са 5.
3) У врећи се налази 70 лоптица разних боја: по 20 црвених, плавих и жутих, док су остале црне. Колико најмање лоптица треба узети случајним извлачењем из кутије да би међу њима било не мање од 10 лоптица исте боје.

ТЕМА 6.2.

ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У СКУПУ Z

Предавач: др Кристина Аго (Нови Сад)

1. Одредити све целе бројеве a и b тако да важи једнакост: $ab - a + b = 2022$.
2. Решити једначину у скупу целих бројева: $2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1)$.
3. Решити једначину у скупу целих бројева: $x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y + 1 = 0$.
4. Решити једначину у скупу природних бројева: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.
5. Доказати да следеће једначине немају решења у скупу целих бројева:
   a) $ab(a + b) = 2023$;
   b) $a^2 + b^2 + a + b = 2023$;
   c) $n^4 + n^3 + n^2 + n = 2023$;
   d) $a^2 - 3b = 17$;
   e) $3a^2 - b^2 = 13$;
   f) $a^2 + 4a - 8b = 11$;
   g) $x^2 - 5y = 10z + 3$.
6. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 6 \cdot 10^{13}$ нема решења у скупу целих бројева.
7. Решити једначину у скупу природних бројева: $x! + 3 = y^2$.
8. Природном броју n дописане су са десне стране три цифре. Показало се да је добијени број једнак збиру свих природних бројева од 1 до n. Одреди збир цифара броја n.
9. Решити једначину у скупу природних бројева: $x + y + z = xyz$.
10. Један математичар је рођен $\overline{abbc}$ године у Сенти а умро $\overline{adef}$ године у Јерусалиму са $\overline{fa}$ година. Ове године би имао $\overline{agf}$ година. Одредити непознате цифре, ако различитим словима одговарају различите цифре и обратно.
11. Решити једначину у скупу природних бројева:
    $xzy + xy + yz + xz + x + y + z + 1 = 2023$.
12. Доказати да не постоји природан број n такав да је број $n^2 - n + 2$ дељив са 49.
13. Одредити све природне бројеве m и n тако да важи једнакост: $2m^2 + n^2 = 2mn + 3n$.
14. Решити једначину у скупу целих бројева: $2x^2 + 5y = 1001$.

ТЕМА 6.3.

ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Предавач: Ивана Андрејић (Чачак)

1. За $x = -1$ и $y = -5$ израчунај вредност израза: $|x - y| + 2|y| - |x + y|$.
2. Ако је $x = 5$ израчунати суму $|x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 100|$.
3. Ако је $x + y = 0$, онда је $|x| = |y|$. Докажи. Да ли важи обрнуто, тј. ако је $|x| = |y|$, онда је $x + y = 0$?
4. Израчунај збир десет узастопних целих бројева ако су:
   а) само четири броја позитивна;
   б) само три броја негативна.
5. Могу ли се у следећим једнакостима звездице заменити знацима + или − тако да се добију тачне једнакости:
   а) 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0;
   б) 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0?
6. Упореди целе бројеве a и b ако је $a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 + 101$ и $b = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + 97 - 99 + 101 - 103$.
7. Реши по x следеће једначине:
   а) $(-10) + (-9) + \ldots + (x - 1) + x = -44$ $(x \in Z)$;
   б) $x + (x + 1) + \ldots + 17 + 18 = 51$ $(x \in Z)$.
8. У поља квадрата 3 x 3 распореди бројеве из скупа {–1, 0 и 1} тако да је збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали различит. Да ли је то могуће?
9. Колико решења у скупу целих бројева има једначина: $|x| + |y| = 3$?
10. Збир 10 узастопних целих бројева је 15. Који су то бројеви?
11. Колико решења има једначина $x \cdot y = 6$, ако су x и y:
    а) природни бројеви;
    б) цели бројеви?
12. Производ 5 узастопних целих бројева је – 720. О којим бројевима је реч?
13. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^2 \cdot |y| - 192$.
14. У изразу $(-1) * (-2) * (-3) * (-4) * (-5)$ замени симбол * симболима операција +, –, · и : тако да вредност добијеног израза буде: а) 19; б) 14; в) – 4.
15. Да ли је могућа једнакост $(-19)(-18)(-17)\ldots(-13)(-12)(-11) = 1234567890$?
16. Да ли је могућа једнакост $(-19)(-18)(-17)\ldots(-12)(-11)(-10) = 12345678900$?
17. Одреди 19 узастопних целих бројева чији је збир једнак њиховом производу.
18. Одреди цео број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 даје остатак 1 и који има најмању могућу апсолутну вредност.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Одреди све узастопне целе бројеве тако да је њихов збир –35.

2) Збир три цела броја је 0, а збир њихових апсолутних вредности је 8. О којим бројевима је реч? Колико има решења?

3) Количник два цела броја је – 6. Може ли њихов производ бити –345?

ТЕМА 6.4.

РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА ЊИМА

Предавач: Марија Стевановић (Чачак)

1. У дате квадратиће уписати различите цифре тако да се добије тачна једнакост.

$$\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{20}{21}$$

Да ли постоји решење у случају да је операција +, – или :?

2. Дат је разломак $\frac{537}{463}$. Који број треба одузети од бројиоца и додати имениоцу како би се после скраћивања добио разломак $\frac{1}{9}$?

3. Рационални број $-\frac{4}{7}$ настао је скраћивањем рационалног броја чији бројилац и именилац имају збир 885. Израчунај првобитни рационални број.

4. Бројеве $a = 3{,}45454545...$ и $b = -2{,}22222...$ написати у облику разломка.

5. Дат је разломак $\frac{79}{33}$. Одреди која цифра се налази на 2023. месту иза децималног зареза у децималном запису датог разломка.

6. Реши једначину $\frac{1}{2-\frac{3}{4+\frac{5}{x}}} = 6.$

7. Шта је веће: $\frac{5555553}{5555557}$ или $\frac{6666665}{6666669}$?

8. Одреди све целе бројеве x, такве да је $-4 \leq \frac{6-3x}{5} < 1$.

9. Одреди све целе бројеве n такве да је $\frac{15-5n}{n}$ а) цео број; б) негативан број.

10. Одреди највећи природан број n и најмањи природан број m тако да је $\frac{n}{2017} < \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{2016 \cdot 2017} < \frac{m}{2017}$.

11. Аритметичка средина неких 25 рационалних бројева је 50, а аритметичка средина неких 50 рационалних бројева је 25. Колика је аритметичка средина тих 75 бројева?

12. Природни бројеви 2, 5, 5, m, n, 11 поређани су у низ тако да сваки следећи број није мањи од претходног. Одреди бројеве m и n тако да аритметичка средина добијених 6 бројева буде цео број.

13. Колико чинилаца треба да буде у производу $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$ да би производ био једнак 100?

14. Влада, Нада и Јагода су добили 600 динара. Влада је добио $\frac{5}{7}$ суме коју су добиле Нада и Јагода, а Нада је добила $\frac{1}{4}$ новца мање од Јагоде. Колико је свако од њих добио?

15. Један радник заврши неки посао за 10 дана, а други за 15 дана. Ако им се придружи трећи радник, онда ће они посао завршити за 5 дана. За које време би трећи радник сам урадио посао ?

16. Када је пешак прешао $\frac{1}{4}$ свог пута и још 5 км, до краја пута му је остала $\frac{1}{3}$ пута и још 10 км. Колика је дужина пута?

17. Ученик је првог дана прочитао $\frac{3}{8}$ књиге, другог $\frac{1}{5}$ књиге и на тај начин прочитао 12 страна више од половине књиге. Колико страна има та књига ?

18. Наташа је имала известан број јабука и крушака. Од укупног броја $\frac{3}{7}$ су јабуке, а све остало су крушке. Када је добила још 4 јабуке и појела 2 крушке онда је имала једнак број јабука и крушака. Колико је Наташа на почетку имала јабука, а колико крушака?

19. Јагода је добила кутију пуну бомбона. Првога дана је појела четвртину бомбона, а другога дана четвртину остатка. Колико бомбона је Јагода добила ако јој је на крају другог дана остало 9 бомбона?

20. Када је пешак прешао 4 км и још половину остатка пута, остало му је да пређе још 4 км и трећину целог пута. Израчунати дужину целог пута.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1. Дат је разломак $\frac{10}{97}$. Који број треба додати и бројиоцу и имениоцу разломка да би се после скраћивања добио разломак $\frac{1}{2}$?

2. Одреди цео број n тако да је збир $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ једнаком неком а) природном, б) целом броју.

3. Један човек поједе теглу меда за 14 дана, а када му се придружи жена заједно поједу мед за 10 дана. За колико би дана сама жена појела мед?

ТЕМА 6.5.

ПРИМЕНА ПОДУДАРНОСТИ НА ТРОУГАО

Предавач: Иванка Томић (Ваљево)

1. 1. Нека је D тачка на страници BC датог троугла ABC, таква да је DC = 2BD. Одредити остале углове троугла, ако је и .
2. У једнакокраком троуглу ABC угао при врху C је . На краку BC дата је тачка E, таква да права AE полови угао BAC. Ако је дуж CD висина овог троугла, доказати да је AE = 2CD.
3. У троуглу ABC дата је висина CE. Симетрала спољашњег угла код темена C сече праву AB у тачки D. Ако је , онда је .
4. Израчунати углове троугла, ако се зна да висина и тежишна дуж из истог темена деле угао код тог темена на три једнака дела.
5. У троуглу ABC, у тачки H секу се висине AD и CE. Ако је CH = AB, израчунати угао ACB.
6. 6. Троугао ABC има углове и . Права која садржи тачку A и нормална је на AB, сече дуж BC у тачки D. Доказати да је .
7. У правоуглом троуглу ABC ( ) конструисане су симетрале AD и BE углова у теменима A и B. Из тачака D и E конструисане су нормале DN и EM на хипотенузу. Доказати да је .
8. У унутрашњој области троугла ABC дата је тачка M. Доказати да важе следеће релације:
9. 9. а) б) AM + MB AC + BC.
10. 10. На симетрали спољашњег угла код темена C троугла ABC изабрана је произвољна тачка M. Доказати да је MA + MB AC + BC.
11. Дати су троуглови ABC и A1B1C1, такви да је AB = A1B1, AC = A1C1 и BAC B1A1C1. Доказати да је BC B1C1.
12. У оштроуглом троуглу ABC највећа висина AN једнака је тежишној дужи BM. Доказати да је ABC мањи од .
13. Симетрала унутрашњег угла троугла дели наспрамну страницу на два дела. Доказати да је сваки од тих делова мањи од њему суседне странице.
14. Симетрале углова троугла секу се у тачки S. Доказати да је тачка S најближа темену највећег угла.
15. У једнакокраком троуглу ABC (C је врх), тачке A1 и C1 су средишта страница BC и AB. Симетрале страница BC и AB секу се у тачки O, тако да је A1OC1 = .
16. Шта је веће: основица AB или крак AC?
17. У правоуглом троуглу ABC (код темена C је прав угао), CD је висина. Тачка M је средиште дужи CD, а тачка N средиште дужи BD. Доказати да су праве AM и CN међусобно нормалне.

18. Дат је једнакостранични троугао ABC. Над страницама AB и BC споља су конструисани квадрати ABMN и BCPQ. Дужи AQ и CM се секу у тачки S. Доказати да је AQ нормално на CM и CQ = 2AS.

19. Две висине троугла нису мање од одговарајућих страница. Израчунати углове овог троугла.

20. У равни су дате тачке A, B, C и D такве да је AB нормално на CD и AC нормално на BD. Доказати да је и AD нормално на BC.

21. Доказати да је тежишна дуж троугла мања од полузбира њој суседних страница.

22. 22. Угао једнакокраког троугла ABC ( ) је . На продужетку крака AC изабрана је тачка D тако да је . Доказати да је и троугао CBD једнакокраки.

23. Из темена C троугла ABC конструисане су нормале на симетрале спољашњих углова код темена A и B. Нормале секу праву AB у тачкама M и N. Доказати да је дуж MN једнака обиму датог троугла.

24. 24. 22. Нека је у троуглу ABC (AB = AC) угао BAC већи од . Нека је D тачка на страници BC, таква да је и нека је E тачка на страници AC, таква да је AE = AD. Израчунати .

ТЕМА 6.6.

ГЕОМЕТРИЈСКИ ДОКАЗ

Предавач: Александра Милошевић (Нови Сад)

1. Збир унутрашњих углова у троуглу је 180°, а спољашњих 360°.

2. Четири праве *a,b,c,d* исте равни секу се у једној тачки и образују осам углова са различитим унутрашњим областима. Ако углове означимо бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 доказати да је збир углова 1, 4 и 7 мањи од 180° односно $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 7 < 180°$.

3. Угао при врху једнакокраког троугла је 36°. Доказати да једна од симетрала углова на основици дели дати троугао на два једнакокрака троугла, а симетрала угла при врху на два правоугла троугла.

4. Унутрашњи угао наспрам дуже странице већи је од унутрашњег угла наспрам краће странице.

5. У унутрашњој области троугла ABC дата је произвољна тачка M. Доказати да важи:

   a. $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$ односно $AM + MB < AC + BC$.

6. Тежишна дуж троугла је мања од полуобима троугла. Доказати.

7. У троуглу ABC симетрала $\sphericalangle BAC$ сече страницу BC у тачки D. На страници AC дата је тачка E таква да је $\sphericalangle CDE$ једнак $\sphericalangle BAC$. Доказати да је $BD = DE$.

8. У равни су дате четири различите тачке A,B,C,D такве да је AB нормално на CD и AC нормално на BD. Нацртати слику и доказати да је AD нормално на BC.

9. У правоуглом троуглу ABC на хипотенузи AB уочене су тачке M и N такве да је $AM = AC$ и $BN = BC$. Доказати да је $\sphericalangle MCN = 45°$.

10. У једнакокраком троуглу ABC, основица BC продужена је преко темена C до тачке D. Доказати да је $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC$.

11. У паралелограму ABCD на краћој дијагонали BD дате су тачке M и N тако да је $DM = BN$. Доказати да је четвороугао чија су темена A, N, C и M паралелограм.
12. На продужетку странице AB троугла ABC, дата је тачка M (A – B – M) тако да је $BM = BC$. Доказати да је права MC паралелна симетрали угла ABC.
13. Нека је *s* симетрала угла код темена B у троуглу ABC а p права која садржи теме C и паралелна је са *s*. Ако права s сече страницу AB у тачки D, докажи да је троугао BCD једнакокрак.

ТЕМА 6.7.

УГЛОВИ ТРОУГЛА

Предавач: Александра Милошевић (Нови Сад)

1. Ако је збир два спољашња угла неког троугла 270°, онда је тај троугао правоугли.
2. Спољашњи угао једнакокраког троугла је 100°. Израчунати унутрашње углове

   троугла.
3. Ако се спољашњи угао код темена A повећа за 35°, а спољашњи угао код темена B смањи за 20°, тада се унутрашњи угао код темена C повећа за своју четвртину. Израчунати унутрашњи угао код темена C.
4. Доказати да се симетрале унутрашњег и спољашњег угла троугла из истог темена секу под правим углом. Доказати.
5. У троуглу ABC симетрала угла ACB образује са страницом AB угао од 128°.

   Израчунати оштар угао између праве AB и симетрале спољашњег угла код темена C.
6. Симетрале оштрих углова правоуглог троугла секу се под углом од 135°. Доказати.
7. У троуглу ABC симетрала спољашњег угла C и симетрала спољашњег угла B, секу се у тачки M. Израчунати $\sphericalangle BMC$, ако је $\sphericalangle BAC = 50^\circ$.
8. Израчунати угао при врху једнакокраког троугла, ако се висине које одговарају крацима троугла секу под углом од 48° .
9. У троуглу ABC, дуж BM је симетрала $\sphericalangle ABC$ ($M \in AC$). Ако је $\sphericalangle BMC = 70'$ колика је

   разлика углова $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle CAB$?
10. Хипотенуза AB правоуглог троугла ABC продужена је преко темена A до тачке M тако да је AC = AM и преко темена B до тачке P тако да је BP = BC. Израчунати угао MCP .
11. Израчунати углове једнакокраког троугла ако се зна да симетрала угла на основици сече симетралу угла при врху под углом од 130° .
12. Хипотенузина висина и симетрала правог угла секу се под углом од 12°. Израчунати

    углове тог троугла .

13. Над страницом CD квадрата ABCD конструисан је једнакостранични троугао CDE. Израчунати углове троугла ABE.
14. Висина BH и симетрала угла ACB троугла ABC се секу у тачки M. Ако је угао BMC два пута већи од угла ACB израчунај угао ACB.
15. Збир два спољашња и унутрашњег несуседног угла једнакокраког троугла је $320°$

    Израчунај углове тог троугла.
16. Одреди оштре углове правоуглог троугла ABC ако нормала из темена C правог угла на хипотенузу и симетрала угла ACB граде угао који је једнак $\frac{1}{9}$ тупог угла између

    симетрала оштрих углова.
17. У правоугаонику ABCD, $AB > BC$, симетрала угла BAD сече дуж BD у тачки M. Ако

    је угао MAC једнак $20°$ израчунај углове троугла AMD.
18. Одреди углове једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) ако је $\mathrm{AM} = 2CE$, гед су тачке

    M и E тачке пресека симетрала углова код A и C, редом са BC и AB.
19. У троуглу ABC угао BAC је $50°$. Симетрала угла BAC сече BC у тачки M тако да је $AC = \mathrm{AM}$. Израчунај углове троугла ABC.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА

ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ

Диофант

ВАЉЕВО


7. РАЗРЕД

ТЕМА 7.1.

СТЕПЕНИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА СТЕПЕНИМА

Предавач: Марија Стевановић (Чачак)

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Одреди најмањи и највећи петоцифрен број облика* 2^n.

РЕШЕЊЕ: Знамо да је $2^{10} = 1024$. Тада је $2^{13} = 2^{10} \cdot 2^3 = 1024 \cdot 8 = 9192$, $2^{14} = 2^{10} \cdot 2^4 = 1024 \cdot 16 = 16384$, $2^{15} = 2^{10} \cdot 2^5 = 1024 \cdot 32 = 32768$, $2^{16} = 2^{10} \cdot 2^6 = 1024 \cdot 64 = 65536$, $2^{17} = 2^{16} \cdot 2 = 65536 \cdot 2 = 131072$. Како је $2^{13} = 9192$ четвороцифрен број, а $2^{17} = 131072$ шестоцифрен број то су тражени бројеви $2^{14} = 16384$ (најмањи) и $2^{16} = 65536$ (највећи).

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Одреди збир цифара у декадном запису броја* $4^{15} \cdot 5^{21}$. *Колико цифара има декадни запис тог броја*?

РЕШЕЊЕ: Из једнакости $4^{15} \cdot 5^{21} = 2^{30} \cdot 5^{21} = 2^{21} \cdot 5^{21} \cdot 2^9 = 10^{21} \cdot 512$. Дакле, тражени број је 512000 ... 000 (21 нула), па дати број има 24 цифре, а збир цифара му је 8.

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Ако је a позитиван реалан број израчунај* $a \cdot a^2 \cdot a^3 \dots \cdot a^{2020}$.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да је $a \cdot a^2 \cdot a^3 \dots \cdot a^{2020} = a^{1+2+3+\dots 2020} = a^{1010 \cdot 2021}$.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Докажи да је израз* $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2019} + 7^{2020}$ *дељив са* 2800.

РЕШЕЊЕ: Ако $A = 7(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 7^5(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \dots + 7^{2017}(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = (1 + 7 + 7^2 + 7^3)(7 + 7^5 + \dots + 7^{207}) = 400(7 + 7^5 + \dots + 7^{2017})$, онда је први чинилац дељив са 400, а други са 7, па је њихов производ дељив са $400 \cdot 7 = 2800$.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Докажи да је број* $3^{20} + 4^9 + 6^{10}$ *сложен број.*

РЕШЕЊЕ: Како је $3^{20} + 4^9 + 6^{10} = (3^{10})^2 + (2^9)^2 + 2^{10} \cdot 3^{10}$ то је дати број једнак $(3^{10})^2 + 2 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} + (2^9)^2 = (2^9 + 3^{10})^2$ што је као квадрат природног броја сложен број.

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Израчунај збир* $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$.

РЕШЕЊЕ: Нека је $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$. Тада је $2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{101}$, па је $2S - S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{101} - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100})$. Ослобађањем од заграде добија се $S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{101} - 1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{100} = 2^{101} - 1$.

<u>*ПРИМЕР 7.*</u> *Одреди све природне бројеве* m и n тако да важи једнакост: $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} + m^{n+3} + m^{n+4} = 1984$.

РЕШЕЊЕ: Како $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} + m^{n+3} + m^{n+4} = m^n(1 + m + m^2 + m^3 + m^4) = 1984 = 31 \cdot 64 = 2^6 \cdot 31 = 2^6(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$, то је $m = 2$ и $n = 6$.

ЗАДАЦИ

1. Нека је $a = 5$ и $b = -0{,}2$. Израчунај $a^{2022} \cdot b^{2023}$.
2. Шта је веће: $\left(\sqrt{5}\right)^{30}$ или $\left(\sqrt{125^{\ 5}}\right)^2$?
3. Ако је n природан број упростити израз: $\dfrac{2^{3n} \cdot 3^{2n}}{6^n}$.
4. Докажи да вредност израза $\left(9^8\right)^n \cdot \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4n}\right)^4$ не зависи од вредности броја n.

5. Напиши израз $\dfrac{16^{n+1}\cdot 2^{5n+3}}{8^{3n}} : \dfrac{4^2}{4^n}$ као степен чија је основа број 2.

6. Решити једначину: $\left(2003^{89}\right)^{5x^2} = 2003^{2002} \cdot 2003^{2003}$.

7. Одреди све природне бројеве x и y такве да је $2 \cdot 2^2 \cdot ... \cdot 2^7 \cdot 2^8 = x^y$.

8. Решити једначину $8^8 + (4^4)^x = 2^{25}$.

9. Израчунати вредност израза $\left(\dfrac{9^{10}\cdot(-4)^{25}\cdot 18^{100}}{8^{50}\cdot(-3)^{220}}\right)^{2023} + \left(\dfrac{12^{100}\cdot 3^{100}}{(-6)^{200}}\right)^{2022}$.

10. Докажи да је број $A = 5 + 5^2 + ... + 5^{2018} + 5^{2019}$ дељив са 155.

11. Докажи да је $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ дељиво са 155 за сваки природан број n.

12. Којом цифром се завршава број $4^n + 5^n + 6^n$?

13. Нека је $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}$, $b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}$ и $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Докажи да је збир квадрата нека два од бројева a, b и c једнак квадрату трећег броја.

14. Шта је веће: $5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5$ или $13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}$?

15. Дат је број $a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5 \cdot 5^6$. Колико нула садржи запис броја a, а колико цифара има?

16. Дат је израз $\dfrac{2^{17}+2^{16}+...+2^2+2+1}{2^8+2^7+...+2^2+2+1} : 3^3$. Докажи да је вредност датог израза цео број.

17. Дат је број $a = 101 \cdot 102 \cdot ... \cdot 199 \cdot 200$. Докажи да је a дељив са 2^{100}, а није дељив са 2^{101}.

18. Израчунај суме: $S_1 = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^n$ и $S_2 = 1 + 11 + 111 + ... + 111...111$ (последњи број има тачно 37 јединица).

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Дати су бројеви $a = 8^4 \cdot 5^{13}$ и $b = 16^3 \cdot 5^7$. Докажи да је збир цифара броја a једнак збиру цифара броја b. Који од датих бројева има више цифара?

2) Одреди x, ако је $2008^x = \dfrac{2008^{2007} + 2008^{2008}}{2009}$.

3) Нека је $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 99 \cdot 100$ и нека је m дељив бројем 2^n. Одреди највећу могућу вредност броја n. Са колико нула се завршава запис датог броја m

ТЕМА 7.2.

ПРИМЕНА ДИРИХЛЕОВОГ ПРИНЦИПА У ГЕОМЕТРИЈИ

Предавач: др Бојан Башић (Нови Сад)

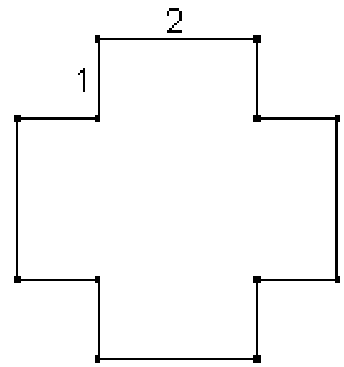
Већина ученика је упозната с појмом Дирихлеовог принципа, често формулисаног на следећи популаран начин: уколико је потребно распоредити $n + 1$ зечева у n кавеза, тада постоји кавез у ком ће се наћи бар два зеца. Оваква популарна формулација је толико устаљена да је у неким језицима и цео принцип назван по некој сличној интерпретацији: *принцип голубије рупе* на енглеском и шпанском, *принцип фиоке* на немачком и француском итд. Устаљен назив на српском језику потиче од познатог немачког математичара под пуним именом Јохан Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) који га је користио у једном свом (касније доста чувеном) раду из 1834. год., иако су историчари установили да се овај принцип појављивао и у неким књигама датираним и два века пре Дирихлеовог рада.

Навешћемо сада и математичку формулацију Дирихлеовог принципа, и то у појачаној форми: *Ако постоји $mn + 1$ објеката са n различитих особина, онда постоји бар $m + 1$ објекат са истом особином*.

Иако се Дирихлеов принцип највише везује за грану комбинаторике, на овом предавању илустроваћемо како он може бити користан и у понеким геометријским задацима.

ЗАДАЦИ

1. У правоугаонику чије су странице 3 и 4 налази се 7 тачака. Докажи да постоје бар две тачке чије међусобно растојање није веће од $\sqrt{5}$.
2. У правоугаонику чије се странице 22 и 26 на случајан начин се бирају 144 тачке. Докажи да при ма каквом избору тих тачака постоје две чије је растојање мање од 3.
3. Стрелац пуца у квадратну мету димензија 70 cm x 70 cm. При томе он је испалио 50 метака од којих је сваки погодио мету тако да нема идентичних погодака. Докажи да се на тој мети могу наћи два поготка на међусобном растојању мањем од 15 cm.
4. У правоугаонику чије су странице 20 и 33 на случајан начин се бира 56 тачака. Докажи да при ма каквом избору тих тачака постоје две чије је растојање није веће од 5.
5. У једнакостраничном троуглу странице 6 на случајан начин се бирају 73 тачке. Докажи да при ма каквом избору тачака постоји троугао чија су темена дате тачке и чија је површина мања од 0,5.
6. У унутрашњости или на рубу фигуре са слике дато је 9 тачака. Докажи да постоје три међу њима које образују троугао површине не веће од 2, који је притом цео садржан у датој фигури.



7. У равни су дате 53 тачаке, тако да међу било које три дате тачке постоје две чије је растојање мање од 1. Докажи да постоји круг полупречника 1 који садржи бар 27 датих тачака.

8. Темена правилног петоугла су обојена плавом или црвеном бојом. Докажи да ма какав распоред бојења био примењен, увек постоје три темена петоугла таква да граде троугао који је једнакократак и чија су сва темена исте боје.

9. Конструисано је 100 правих које су обојене плавом, жутом или црвеном бојом тако да свака дели дати паралелограм на два четвороугла једнаких површина. Докажи да су бар 34 конструисане праве исте боје.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) У правоугаонику чије су странице 3 и 4 налази се 6 тачака. Докажи да постоје бар две тачке чије међусобно растојање није веће од $\sqrt{5}$.

2) У квадрату странице 10 дата је 101 тачка. Докажи да постоји троугао чија су темена дате тачке, а чија површина није већа од 1.

3) Унутар квадрата странице 1 дата је 51 тачка. Докажи да постоји круг чији је полупречник $\frac{1}{7}$, унутар кога се налазе бар 3 дате тачке.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО

ТЕМА 7.3.

УВОД У КОМБИНАТОРИКУ

Предавач: др Кристина Аго (Нови Сад)

1. Међу 30 студената који су полагали испит један је направио 13 грешака, а остали мање. Доказати да постоје бар три студента са истим бројем грешака.
2. Да ли је могуће у свако поље таблице $n \times n$ уписати по један од бројева $-1,0,1$ тако да збирови по свим врстама, колонама и две дијагонале буду различити?
3. Колико има природних бројева код којих је свака цифра, почевши од друге (за случај да постоји друга цифра) већа од претходне и дељива са њом?
4. Колико има природних бројева мањих од 10000 чији је збир цифара 4?
5. Колико има природних бројева са производом цифара 60 у којима се не јавља цифра 1?
6. Колико има четвороцифрених бројева чије су све цифре различите?
7. Колико се парних четвороцифрених бројева може записати помоћу цифара $1,3,4,6,7$, ако у запису сваког броја суседне цифре морају бити различите?
8. Колико има троцифрених бројева који се записују помоћу цифара $0,1,2,3,4,5$, а дељиви су са 3?
9. Колико различитих позитивних делилаца (укључујући број 1 и самог себе) има следећи број: а) 60; б) $2^6 \cdot 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2$?
10. Осам туриста је одлучило да преноћи у граду у коме има 6 хотела. На колико начина туристи могу да изаберу хотеле?
11. На колико начина можемо елементе из скупа $\{1,2,3,\dots,n\}$ распоредити у низ тако да елементи 1 и 2 буду суседни?
12. На колико начина се Алекса, Павле, Милош, Јелена и Ирина могу распоредити на пет узастопних седишта у једном реду биоскопа, тако да сваки од тројице дечака мора да седи поред најмање једне од две девојчице?
13. У кутији се налази 100 куглица различитих боја: 28 црвених, 20 зелених, 12 жутих, 20 плавих, 10 белих и 10 црних. Колики је најмањи број кулгица које треба извући из кутије (без гледања) тако да међу извученим куглицама буде сигурно 15 истобојних?
14. На колико начина је могуће попунити таблицу $m \times n$ бројевима 1 и -1 тако да производи у свим врстама и колонама буду једнаки 1?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1. Група од 22 ученика је успешно урадила три контролна. Могуће оцене су 3, 4 и 5. Доказати да су бар три студента добила исте оцене (не обавезно из истих предмета).
2. На зиду су три куке. На колико начина се на њих могу окачити четири капута? (На једну куку се може окачити и више капута.)
3. На колико начина можемо елементе из скупа $\{1,2,3,\dots,n\}$ распоредити у низ тако да елементи 1 и 2 буду суседни а елементи 1 и 3 не буду суседни?
4.

ТЕМА 7.4.

КВАДРАТ И КОРЕН РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

Предавач: Марија Стевановић (Чачак)

Ако је x неки рационалан број онда се број $x \cdot x$ означава симболом x^2 и назива *квадрат рационалног броја x.*

<u>*ПРИМЕР 8.*</u> *Ако је r рационлан број онда је $r^2 \geq 0$. Докажи.*
РЕШЕЊЕ: Рационалан број може бити негативан, нула или позитиван број.
1) Ако је $r < 0$, онда је $r^2 = r \cdot r > 0$, јер је производ два негативна броја увек позитиван;
2) Ако је $r = 0$, онда је $r^2 = r \cdot r = 0 \cdot 0 = 0$;
3) Ако је $r > 0$, онда је $r^2 = r \cdot r > 0$, јер је производ два позитивна броја увек позитиван.
Према томе ако је r било који рационалан број, његов квадрат је увек ненегативан број (нула или позитиван број).

<u>*ПРИМЕР 9.*</u> *Нека су x и y рационални бројеви. Да ли су тачна тврђења:*
а) Ако је $x = y$ онда је $x^2 = y^2$; б) Ако је $x^2 = y^2$, онда је и $x = y$?
РЕШЕЊЕ: а) Ако су x и y рационални бројеви такви да је $x = y$, онда је $x^2 = x \cdot x = y \cdot y = y^2$.
б) Ово тврђење је тачно за неке вредности x и y (нпр. ако су оба рационална броја позитивна или оба негативна), а није тачно за неке друге вредности x и y. На пример $7^2 = (-7)^2 = 49$, а 7 и -7 нису једнаки бројеви.

<u>*ПРИМЕР 10.*</u> *Којим цифрама се завршавају квадрати целих бројева? Које цифре не могу бити последње цифре квадрата целих бројева?*
РЕШЕЊЕ: Цели бројеви се завршавају цифрама 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Њихови квадрати се завршавају цифрама $0 \cdot 0$, $1 \cdot 1$, ... $9 \cdot 9$, тј. цифрама 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Закључак је да се квадрати целих бројева увек завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и никада не завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Ако је p прост број, онда број p^2 има тачно три делиоца рачунајући јединицу и њега. Докажи.*
РЕШЕЊЕ: Како је p прост број сви делиоци броја $p^2 = p \cdot p$ су 1, p и p^2 и има их тачно три.

ЗАДАЦИ

1. Ако је $a = -\frac{2}{3}$ израчунај вредност израза $\frac{3a^2 - 6a + 2}{a^2 + 3a + 2}$.
2. Одреди рационалне бројеве x и y такве да је $3x^2 = 192$ и $5y^2 = 0{,}8$?
3. Који рационални бројеви испуњавају следеће неједнакости: а) $x^2 \geq 36$; б) $7y^2 < 0{,}28$?
4. Колико има целих бројева a таквих да је $25 \leq a^2 < 144$? Колики је њихов збир?
5. Нека су x и y цели бројеви и нека је $x^2 + y^2 = 2$. Одреди све могуће вредност израза $x + y$.
6. У позоришној дворани са два партера (лево и десно) у сваком партеру има онолико редова, колико у реду има столица. Ако у сваком реду има једнак број столица и ако у сали има 578 столица, колико има редова у сали и колико је столица у једном реду?
7. Ако је n паран природан број, онда је n^2 такође паран природан број. Докажи. Да ли слично тврђење важи и за непаран број?
8. Постоји ли природан број n такав да је $n^2 - 8$ дељиво са 5?
9. Постоји ли цео број чији је квадрат једнак 7776?
10. Докажи да је број $201920192019^2 - 1$ дељив са 10.
11. За које вредности рационалног броја x постоји $\sqrt{3x-18}$.
12. Одреди природан број n такав да је $n < \sqrt{40} < n+1$.
13. Одреди све природне бројеве n такве да је $4 < \sqrt{n} \leq 5$.
14. Нека је n природан број такав да је $300 < n < 500$. Одреди све вредности n тако да је и $\sqrt{n}$ природан број.
15. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$?
16. Решити по x једначине: а) $x^2 = 5$; б) $x^2 - 6x + 7 = 0$; в) $x^2 + 2x = 10$.
17. Ако је $x = 1 + \sqrt{2}$, онда је $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Докажи.
18. Одреди највећи цео број n, тако да је $n < 5\sqrt{2}$.
19. Да ли је тачна неједнакост $\sqrt{5} + \sqrt{7} < 6$?
20. Шта је веће a или $\sqrt{a}$ (a је позитиван рационалан број)?
21. Израчунај $\sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2}$ ако је $\frac{1}{x} = \sqrt{0{,}04}$.
22. Доказати да су изрази $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ и $\left(\sqrt{17}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17}-2\sqrt{3}\right)$ рационални бројеви.
23. Израчунај: а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}$.
24. Упрости изразе: а) $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-6x+9}$ (за $0 \leq x \leq 2$);
    б) $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-10x+25}$ (за $2 \leq x \leq 3$).
25. Израчунај вредност израза: а) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$; б) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Колико има природних бројева мањих од 1000 који имају тачно три делиоца?

2) Реши једначину: $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

3) Докажи да је $\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}} > 3$.

ТЕМА 7.5.

МЕТОД ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

Предавач: др Војислав Андрић (Ваљево)

Последња цифра у запису природног или целог броја је понекад веома корисна за решавање многих математичких проблема. У претходним темама истраживана је последња цифра квадрата целих бројева. Циљ ове теме је да се кроз наредне примере и задатке покаже како се истраживањем последње цифре још неких карактеристичних бројева решавају проблеми дељивости, једначине са целобројним промењљивим ... и како последња цифра може бити корисна и у другим ситуацијама.

1. Којим цифрама се завршавају квадрати природних (и целих) бројева?
2. Постоје ли природни бројеви *x и y* такви да је $x^2 + 6^y = 9\,876\,543$?
3. Да ли је број $3^{2020} + 4^{2019} + 5^{2018}$ дељив са 10?
4. Има ли једначина $m^4 + n^4 = 33333333$ решење у скупу целих бројева?
5. Одреди природне бројеве x и y такве да је $x! + 35y = 9789$.
6. Којим се цифрама се може завршавати запис производа два узастопна природна броја?
7. Написана је једнакост $1 + 2 + ... + (n-1) + n = 44444444444444$. Да ли је она могућа?
8. Ако је κ природан број, којим цифрама се завршавају бројеви $1^\kappa, 2^\kappa, 3^\kappa, 4^\kappa, 5^\kappa, 6^\kappa, 7^\kappa, 8^\kappa$ и 9^κ?
9. Докажи да је број $3^{2019} + 8$ дељив са 5, а није дељив са 10.
10. Одреди најмањи природан број n такав да израз $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ није дељив са 5.+
11. Докажи да је број $m = 6^{555} + 7^{555} + 8^{555} + 9^{555}$ дељив са 10.
12. Да ли једначина $9^n + 11^n = 4^n$ има решење у скупу природних бројева?
13. За које вредности природног броја n је израз $7^n - 1$ дељив са 10?
14. Постоје ли природни бројеви x, y и z такви да је $5^x + 6^y + 7^z = 666666$?
15. Одреди сва решења једначине $x! + y! = 5046$ у скупу природних бројева.
16. Докажи да, ако је $n > 1$, онда је $n!$ паран и ако је $n > 4$ онда је $n!$ дељив са 10.
17. Да ли је број $m = 1^{2020} + 2^{2020} + 3^{2020} + 4^{2020}$ дељив са 10?

18. Докажи да је број $\left(7^7\right)^7 + 3$ дељив са 10.

19. Постоје ли природни бројеви n и k такви да је $5^n + 6^n + 7^n + 8^n = 10k$?

20. Докажи да је израз $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ дељив са 10 за сваки природан број n.

21. Колико решења има једначина $1! + ... + x! = y^2$, ако су x и y природни бројеви?

22. Да ли је број $2^9 + 2^{99}$ дељив са 800?

23. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $4x^2 + 5y^2 = 2023$?

24. Докажи да у декадном запису броја 2^{2023} постоји цифра која се понавља бар 61 пут.

25. Ако су x и y природни бројеви, онда једначина $x! + y! = 201920192019$ нема решења. Докажи.

26. Одреди сва решења једначине $x! + y! = z!$ у скупу природних бројева.

27. Докажи да је број $24^{24} + 24$ дељив са 100.

28. Ако је p прост број, тада је $p^{2018} + 2019$ сложен број. Докажи.

29. Докажи да је број $24^{24} + 24$ дељив са 100.

30. Ако је p прост број, тада је $p^{2020} + 2019$ сложен број. Докажи.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Доказати да једначина $x^4 + 5^y + z^{2020} = 348934893489$ нема решења у скупу целих бројева.

2) Решити у скупу природних бројева једначину $2x^2 + y! = 6051$.

3) Одреди последње три цифре броја $n = 2^{2008} - 2^{2006} + 2^{2003}$.

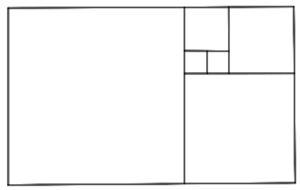
ТЕМА 7.6.

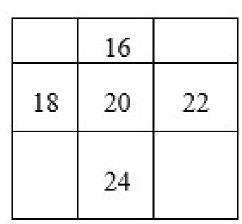
ПОВРШИНА ТРОУГЛА И ЧЕТВОРОУГЛА

Предавач: Марија Стевановић (Чачак)

1. Квадрат је подељен на два правоугаоника чији су обими 32 cm и 40 cm. Израчунај обим и површину квадрата.

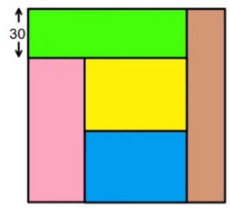
2. Правоугаоник је подељен на квадрате као на слици. Израчунај површину правоугаоника ако је обим најмањег квадрата 12 cm.

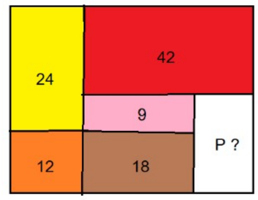




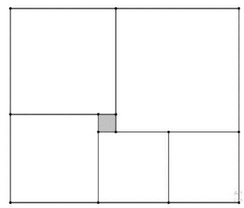
3. Квадрат је разложен на 9 правоугаоника као на слици, при чему дати бројеви представљају обиме одговарајућих правоугаоника. Одреди површину квадрата.

4. На слици је један квадрат који је подељен на пет правоугаоника једнаких површина. Колика је површина сваког од тих правоугаоника? Одреди обим сваког од тих правоугаоника.





5. Дате су површине пет правоугаоника као на слици. Одреди површину шестог (белог) правоугаоника.



6.

7. Израчунај површину правоугаоника ако су на слици све фигуре квадрати и ако је површина осенченог квадрата једнак 16 cm^2.

8. У квадрату ABCD, чија је страница 6 cm, тачке M и N су средишта страница AB и BC. Колика је површина троугла MND?

9. Странице AB, BC и CA троугла ABC, продужене су преко темена B, C и A за своју дужину, тако да је AB = BA', BC = CB' и CA = AC'. Ако је површина троугла ABC једнака 11 cm^2, колика је површина троугла A'B'C'?

10. У Декартовом координатном систему дате су тачке A(4, -7), B(4, 3). Колико има троуглова чија је једна страница дуж AB, а површина троугла једнака 30?

11. Постоји ли троугао чије су све странице веће од 100 cm, а чија је површина мања од 1 cm^2?

12. Постоји ли троугао чије су висине 3 cm, 6 cm и 8 cm?

13. Постоји ли троугао чије су све висине мање од 1 cm, а чија површина је већа од 2023 cm^2?

14. Тачке M, N и P деле странице AB, BC и CA троугла ABC у односу 2 : 1. Ако је површина троугла ABC једнака 36 cm^2, колика је површина троугла MNP?

15. На страници BC троугла ABC дата је произвољна тачка D. Тачка M дели дуж AD тако да је AM : MD = 2 : 3. Одреди површину троугла ABC, ако је површина троугла BMC једнака 18 cm^2.

16. Дуж AC дужине 14 cm је својом унутрашњом тачком B подељена у односу 3 : 4. Над дужима AB и BC са разних страна у односу на AC конструисани су квадрати ABDE и BCFG. Нека су M и N пресеци дијагонала добијених квадрата. Израчунај површину четвороугла MNCD.

17. Дужине свих страница троугла T су мање од 1 cm, а дужине свих страница троугла T ' су веће од 2006 cm. Може ли површина троугла T бити већа од површине троугла T ' ?

18. У унутрашњој области паралелограма ABCD изабрана је произвољна тачка M. Дужи MA, MB, MC и MD деле паралелограм на четири троугла ABM, BCM, CDM и DAM чије су површине редом P_1, P_2, P_3, P_4. Докажи да је $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

19. Дијагонале трапеза ABCD секу се у тачки O. Докажи да је P(ΔAOD) = P(ΔBOC).

20. Дат је паралелограм ABCD. Конструиши праву p која дати паралелограм дели на две фигуре једнаких површина. Колико таквих правих постоји?

21. На страницама AB и CD четвороугла ABCD дате су тачке K, L, M и N такве да је AK = KL = LB и CM = MN = ND. Колика је површина четвороугла KLMN, ако је површина четвороугла ABCD једнака 60 cm^2?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Правоугаоник је подељен на четири правоугаоника чије су површине 15 cm^2, 25 cm^2, 27 cm^2 и P. Колика је површина четвртог правоугаоника?

2) Докажи да права која садржи: а) средишта основица трапеза; б) средиште средње линије трапеза дели трапез на два трапеза једнаких површина.

3) Дат је једнакокраки трапез ABCD чије су основице AB = 10 cm и CD = 6 cm и чије су дијагонале AC и BD нормалне. Израчунати површину датог трапеза.

ТЕМА 7.7.

ХЕРОНОВА ФОРМУЛА

Предавач: Ивана Андрејић (Чачак)

1. Дат је троугао ABC чије су странице 13 cm, 15 cm и 14 cm. Израчунај површину тог троугла.

2. Израчунај висине троугла чије су странице 17 cm, 25 cm и 28 cm.

3. Израчунај странице троугла ако је $a : b : c = 13 : 20 : 21$ и површина троугла једнака 504 cm^2.

4. Одреди површину конвексног четвороугла ABCD ако је AB = 12 cm, BC = 11 cm, CD = 13 cm, AD = 16 cm и ако је дијагонала тог четвороугла BD = 20 cm.

5. Докажи да је $P = r \cdot s$, где је P површина троугла, *r* полупречник круга уписаног у троугао, а *s* је полуобим тог троугла.

6. Израчунај полупречник кружнице уписане у троугао чије су странице 15 cm, 41 cm и 52 cm.

7. Дат је трапез ABCD чије су основице 50 cm и 14 cm, а краци 25 cm и 29 cm. Израчунај површину тог трапеза.

8. Израчунај површину делтоида ABCD ако су дате странице делтоида AB = 17 cm и AD = 25 cm и дијагонала AC = 30 cm.

9. Три кружнице полупречника 12 cm, 14 cm и 16 cm међусобно се додирују са спољне стране. Колика је површина троугла чија су темена центри датих кружница?

10. У троуглу ABC дате су странице AB = 27 cm, AC = 29 cm и тежишна дуж AA_1 = 26 cm. Колика је површина тог троугла?

11. Странице троугла ABC су AB = 21 cm, BC = 17 cm и CA = 10 cm. У унутрашњој области троугла дата је тачка M чија је удаљеност од странице AB = 2 cm, а од странице
BC = 4 cm. Колико је растојање тачке M од странице AC?

12. Дат је троугао ABC чије су странице AB = 13 cm, BC = 14 cm и CA = 15 cm. Кружница *к* чије је средиште на страници BC, додирује странице AB и AC. Израчунај полупречник кружнице *к*.

13. Нека је тачка S центар круга уписаног у троугао ABC. Одреди странице троугла и полупречник круга уписаног у троугао ABC ако су површине троуглова ASB, BSC и CSA редом 7 cm^2, 15 cm^2, 20 cm^2.

14. Висина CC’ која одговара основици једнакокраког троугла ABC је 20 cm, а висина AA’ која одговара краку је 24 cm. Одреди обим и површину тог троугла.

15. Полупречник круга уписаног у троугао ABC је 14 cm, а додирна тачка круга и странице AB дели страницу AB на одсечке који су једнаки 18 cm и 21 cm. Израчунај странице и површину троугла ABC.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Израчунај површину свих тупоуглих троуглова чије су дужине странице изражене узастопним природним бројевима.

2) Одреди површину паралелограма чија је једна страница 51 cm, а дијагонале су 40 cm и 74 cm.

3) Дијагонале трапеза су 20 cm и 34 cm, а средња линија трапеза је 21 cm. Колика је површина трапеза? Колика је висина трапеза?

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО


8. РАЗРЕД

ТЕМА 8.1.

ЕКСТРЕМЕНЕ ВРЕДОСТИ

Предавач: др Војислав Андрић (Ваљево)

1. Ако је x ма који реалан број, онда је $x^2 \geq 0$. Доказати .
2. Одредити најмању вредност следећег израза: $x^2 - 12x + 2021$. За коју вредност
   a. x добијамо ту вредност ?
3. Одредити најмању (минимум) или највећу (максимум) вредност функција:

   а) $f(x) = x^2 + 11$; б) $f(x) = x^4 - 16$;

   в) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; г) $f(x) = 5 - x^{12}$.
4. Одредити највећу (максималну) или најмању (минималну) вредност израза:

   а) $A = -x^2 + 3x - 8$; б) $B = 5 - \sqrt{x^2+16}$;

   в) $C - 7 + \sqrt{x^2-16}$; г) $D = 1 + \sqrt{x^2-6x+8}$.
5. Збир два броја је 42. Када је њихов производ највећи?
6. Од свих правоугаоника обима 20 cm одредити онај који има највећу површину .
7. Збир два броја је 48. Када је збир њихових квадрата најмањи?
8. Од свих правоугаоника обима 40 cm одредити онај који има најмању дијагоналу .
9. У круг полупречника 10 cm уписати правоугаоник највеће могуће површине.
10. Одредити најмању или највећу вредност следећих функција:

    а) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{2-x}{1+x}$ $(x \geq 0)$

    в) $f(x) = \dfrac{2x^2-45}{9+x^2}$.
11. Одредити највећу и најмању вредност количника који се добија када се двоцифрени природни број подели збиром својих цифара.
12. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине, одредити највећу или најмању вредност функција :

    а) $f(x) = x + \frac{9}{x}$ $(x > 0)$; б) $f(x) = \frac{x^2+4}{3x}$ $(x > 0)$.
13. Од свих правоугаоника чија је површина једнака 36 cm одредити онај чији је обим најмањи.
14. Из датог полукруга полупречника $r = 10\ cm$ треба изрезати правоугаоник највеће површине. Колике су странице тог правоугаоника ?
15. Дати су реални бројеви x, y и z, такви да је $x + y + z = 12$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 72$. Колико највише може бити реалан број x?
16. Збир основне ивице a и висине H правилне и праве шестостране призме је 20 cm. Одредити a и H, тако да је дужа дијагонала призме најмања могућа.Израчунати површину и запремину те призме.

17. Збир природних бројева m и n је 20. Одредити највећу могућу вредност израза m^2n.

18. Разбојник је пронашао пећину са златом, дијамантима и сандуком за благо. Пун сандук злата има масу 200кг, а пун сандук дијаманата 40кг. Разбојник може да подигне и изнесе терет не већи од 100 кг. Килограм злата се може продати за 20, а килограм дијаманата за 60 дуката. Колико највише дуката разбојник може добити за благо које би одједном изнео?

19. Један хотел има 40 соба. Цена издавања собе је 10 000 динара. Ако би се цена собе повећала за 500 динара једна соба би остала празна, ако би се повећала за 1 000 динара две собе би остале празне ...Трошкови једнодневног одржавања издате собе износе 1000 динара. Какву конструкцију издавања соба је могуће направити тако да дневна зарада хотела буде највећа.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Одредити највећу и најмању вредност количника који се добија када се збир цифара троцифреног броја подели датим троцифреним бројем.

2) 2. Одредити за коју вредност реалних бројева x и y разломак $\frac{2x^2+2y^2-4y+7}{x^2+y^2-2y+2}$ има највећу вредност?

3) Мерни бројеви страница троугла су: $AB = 14\ cm$, $BC = 15\ cm$ и $CA = 13\ cm$. У троугао је уписан правоугаоник MNPQ, тако да темена M и N припадају дужи AB, а темена P и Q редом дужима BC и CA. Одредити правоугаоник MNPQ највеће површине.

ТЕМА 8.2.

ЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Предавач: др Војислав Андрић (Ваљево)

Ако су a, b и c цели бројеви и $ab \neq 0$, онда се линеарна једначина $ax + by = c$, при чему су x и y цели бројеви, назива линеарна Диофантова једначина са две непознате.

Свака линеарна једначина са две промењљиве и целобројним коефицијентима увек може се свести на једначину облика $ax + by = c$.

Основна питања везана за сваку Диофантову једначину су:

- Доказати или оповргнути постојање решења.
- Да ли једначина има коначно или бесконачно решења?
- Ако једначина има коначно решења колико је то?
- Ако једначина има коначно решења, одреди сва њена решења;
- Ако једначина има бесконачно много решења, одреди формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
- Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

ЗАДАЦИ

1. Имају ли једначине $x + y = 2006$ и $2x + 10y = 2005$ решења у скупу целих бројева?
2. Потребан и довољан услов да линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има решење је да је број с дељив са НЗД (a, b).
3. Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има увек решење ако је НЗД (a, b) = 1, тј. уколико су a и b узајамно прости цели бројеви.
4. Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) нема решења ако се НЗД (a, b) не садржи у c.
5. Докажи да једначина $2x + 5y = 111$ има бесконачно много целобројних решења, а једначина $3x + 6y = 1000$ нема целобројних решења.
6. Одреди сва решења једначине $40y - 63x = 521$ ако су x и y цели бројеви.
7. Ако је уређени пар (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$ ($ab \neq 0$ и a и b су узајамно прости цели бројеви), тада и само тада је релацијама $x = x_0 + b_k$ и $y = y_0 - a_k$ ($к \in Z$) дефинисано опште решење дате једначине.
8. Одреди сва решења једначине $3x + 4y = 100$, ако су x и y цели бројеви.
9. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је $4x + 7y = 2005$?
10. У берберској радњи Илије Докмановића раде бербери Мића и Јанко. Они су за тачно 100 динара ошишали чету капетана Златковића која броји тачно 100 војних лица. Ако су војнике шишали за пола динара, подофицире за један динар, а официре за пет динара, колико војника, подофицира и официра су подшишали Мића и Јанко?
11. Влада је купио свеске по цени од 7 динара и оловке по цени од 4 динара и за то потрошио 60 динара. Колико је Влада купио оловки, а колико свески?
12. Износ од 2007 динара плаћен је новчићима од 2 динара и 5 динара. Колико је којих новчића било?
13. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $4x + 9y = 58$.
14. У једном разреду било је 15 девојчица и 18 дечака. Како ће они међусобно поделити 1234 кликера тако да сви дечаци добију једнак број кликера и све девојчице, такође, добију једнак број кликера?
15. Доказати да следеће једначине немају целобројних решења:
    а) $3x + 15y = 2006$; б) $21x - 35y = 88$; в) $18x^2 - 33y^2 = 4444444$.
16. Одреди једно решење, а затим написати опште решење следећих линеарних Диофантских једначина:
    а) $3x - 5y = 77$; б) $4x + 11y = 121$; в) $7x - 100y = 35$.
17. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да важи једнакост $3x + 7y = 555$?
18. Одреди све природне бројеве који задовољавају једначине:
    а) $x + 2y + 3z = 16$; б) $2x + 3y + 4z = 23$.
19. На складишту се налазе ексери упаковани у сандуке од 16, 17 или 40 килограма. Како, не отварајући сандуке, купцу испоручити тачно 100 kg ексера?

20. Девојка Шехерезада је из ноћи у ноћ причала моћном султану по 3 или по 5 бајки. За колико је највише ноћи могла да исприча 1001 причу ? За колико је ноћи најбрже то могла да учини?

21. У једној књижари свеска кошта 0,5 (пола) €, збирка 2€, а уџбеник 5€. На колико се начина за тачно 100 € може купити тачно 100 предмета?

22. Одреди природне бројеве x и y тако да је $x^2 + 4y^2 = 244$.

23. У скупу природних бројева решити једначину: $5x^2 + 3y^2 = 1033$.

24. Доказати да се коцка са ивицом дужине 13 може исећи на 1995 мањих коцки са ивицама дужине 1, 2 или 3. Колико се при том добија коцки чија ивица има дужину 3?

25. Разломак $\frac{281}{140}$ представити као збир три разломка чији су и бројиоци и имениоци једноцифрени бројеви.

26. Одреди троцифрени број чије су све цифре различите од нуле, а збир свих различитих двоцифрених бројева састављених од цифара овог броја (цифре се не могу понављати) једнак је том броју.

27. На колико начина се број 1984 може представити као збир узастопних природних бројева и који су то бројеви?

28. Одреди шестоцифрен број чији производи са 2, са 3, са 4, са 5 и са 6 представљју такође шестоцифрене бројеве који се пишу у истим цифрама као и тражени број.

29. Одреди све троцифрене бројеве који су 15 пута већи од збира својих цифара.

30. У соби се налазе столице са 3 и са 4 ноге. Када на све столице седну људи, у соби је укупно 69 ногу. Колико у соби има столица са 3, а колико са 4 ноге?

31. Одреди колико парова природних бројева (x, y) задовољава једначину $3x + 8y = 1996$.

32. У координатној xOy равни дата је тача М са координатама (5, 3). Кроз тачку М конструисана је права p која координатне осе сече у тачкама А $(a, 0)$ и В $(0, b)$. Одреди све вредности a и b тако да су и a и b природни бројеви.

33. Ако се између цифара двоцифреног природног броја напише нула добија се број који је 9 пута већи од датог. Одреди о којим бројевима је реч.

34. Одреди све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је $7x^2 - 3y^2 = 17$.

35. Постоје ли цели бројеви x и y такви да важи једнакост:

$$3x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 7$$

36. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_{2004}, x_{2020}$ природни бројеви такви да је $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2020}^2 = 2045$. Одреди $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$.

ЗИМСКА ШКОЛА
МЛАДИХ
МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО

ТЕМА 8. 3.

КОМБИНАТОРИКА

Предавач: др Бојан Башић (Нови Сад)

Комбинаторику често називају и *уметност бројања.* Уопштено говорећи, то је област математике чија су главна интересовања: пребројавање одређених објеката, груписањем, спаривањем и сличним методама, испитивање постојања објеката и структура које задовољавају унапред дате критеријуме, конструкција оваквих објеката и структура, као и оптимизација, тј. налажење „најбоље“ структуре која испуњава дате услове.

Бројање може бити једноставно, али када има много објеката са одређеном особином, потребно је наћи што бржи и ефикаснији начин за пребројавање. Људи су се одавно сусрели са оваквим проблемима. Најстарији писани трагови пребројавања датирају око 1600. год. п. н. е. у Ахмесовом папирусу (названом по египатском писару Ахмесу, који га је преписао не помињући оригиналног аутора; овај папирус је такође познат и као Рајндов – по шкотском анктиквару). У овом папирусу се користе комбинаторне технике на геометријском низу који пребројава број јединица и двојки које дају унапред задату суму.

Наравно, комбинаторика се не бави само пребројавањима, она има разне подобласти и сродне области. Осим примена у најразличитијим областима математике, комбинаторика има примену и ван ње, као на пример: у хемији (проучавање распореда у молекулу), биологији (проучавање структуре гена и протеина), и превасходно у рачунарским наукама (анализа ефикасности алгоритама, проблеми распоређивања и премештања ресурса) итд.

ЗАДАЦИ

1. Одељење А има a ученика, одељење В има b ученика, а одељење С има c ученика. На колико начина се може формирати трочлана ученичка делегација, ако у делегацији мора бити по један ученик из сваког одељења?
2. На старту финалне трке је 8 атлетичара. На колико се начина могу: а) поделити златна, сребрна и бронзана медаља; б) одабрати тројица за посету спонзору трке?
3. На колико начина могу бити одиграна прва два потеза (по један потез белог и црног играча) у једној шаховској партији?
4. Да ли скакач полазећи са ма ког поља може обићи сва поља шаховске табле 6 x 6?
5. Да ли је могуће на шаховској табли распоредити 32 скакача тако да се они међусобно не нападају?
6. У колико најмање потеза може скакач из доњег левог поља шаховске табле (a1) стићи до горњег десног (h8)? Докажи!

7. На великом тениском турниру учествује 2023 такмичара који играју по систему: победник једног тениског меча наставља такмичење, а побеђени испада из даљег такмичења. Колико треба одиграти мечева да би се добио победник турнира?

8. На колико начина 5 ученика могу сести на 10 расположивих и нумерисаних столица S_1, S_2, ... S_{10}, при чему сви ученици седе и на свакој столици седи само један ученик?

9. а) Могу ли се бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 распоредити у поља квадратне таблице 3 x 3, тако да је производ бројева по врстама, колонама и дијагоналама једнак? б) Постоје ли различити природни бројеви a_1, a_2, ... a_9 који се могу распоредити у поља квадрата 3 x 3, тако да је производ бројева по врстама, колонама и дијагоналама једнак?

10. Колико има шестоцифрених природних бројева чији је производ цифара паран?

11. Колико има троцифрених бројева који нису дељиви ни са 2, ни са 3 ни са 5?

12. Колико има петоцифрених палиндрома чији су елементи 1, 2, 3 и 4?

13. Да ли је више природних бројева мањих од 1000 чији је збир цифара једнак 13, или је више таквих природних бројева чији је збир цифара једнак 14?

14. Докажи да у декадном запису броја 2^{2023} постоји цифра која се појављује најмање 61 пута.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Дата је шаховска табла 5 x 5. Да ли је могуће да скакач који се налази у доњем левом углу шаховске табле у наредна 24 потеза обиђе целу шаховску таблу?

2) На колико начина 10 ученика могу сести на 5 расположивих и нумерисаних столица S_1, S_2, ... S_5 , при чему 5 ученика седи, 5 ученика стоји и на свакој столици седи само један ученик?

3) Дат је конвексан тринаестоугао. Региструју се сви петоуглови чија су темена – темена датог тринаестоугла и сви осмоуглови чија су темена – темена датог тринаестоугла. Да ли је регистровано више петоуглова или више осмоуглова?

ТЕМА 8.4.

ПРИЗМА

Предавач: Ивана Андрејић (Чачак)

1. Ако се свака ивица коцке увећ за 2 cm, запремина коцке се увећа за 98 cm^3. За колико
2. се разликују површине дате и добијене коцке?

3. Раван садржи ивицу једне основе и њој наспрамну ивицу друге основе правилне шестостране призме чија је основна ивица a и висина $2a$. Израчунај површину пресека призме и дате равни.

4. Једно теме коцке удаљено је од дијагонале коцке 14 cm. Израчунај површину и запремину коцке.

5. Израчунај P и V коцке чија је дијагонала једнака дијагонали квадра чије су дужине ивица 1 cm, 5 cm и 7 cm.

6. Ивице квадра, чија површина 112 cm^2, односе се као 1 : 2 : 4. Колике су ивице, а колика запремина квадра?

7. Површине три стране квадра су P_1, P_2 и P_3. Одредити запремину квадра.

8. Површина основе праве тростране призме једнака је 4 cm^2. Површине бочних страна су 9, 10 и 17 cm^2. Израчунати запремину призме.

9. Основа косе призме је паралелограм са страницама 3 dm и 6 dm и оштрим углом од 45º. Бочна ивица призме дуга је 4 dm и са равни основе гради угао од 30º. Израчунати запремину призме.

10. Стране четворостране призме су подударни ромбови странице *a* и оштрог угла 60º. Одреди површину призме.

11. Основа призме је правилни шестоугао странице *a*. Бочне стране су квадрати. Израчунај дужине дијагонала призме и површине њених дијагоналних пресека (тј. пресека који садрже две несуседне бочне ивице).

12. Површине бочних страна праве тростране призме су 64 cm^2, 80 cm^2 и 48 cm^2. Ако је висина призме 16 cm^2, израчунај њену запремину .

13. Основа праве призме је правоугли троугао са површином $9\sqrt{3}$ cm^2 и углом од 30º. Површина највеће бочне стране је 8 cm^2. Одредити запремину призме .

14. Израчунај запремину правилне шестостране призме, ако је мања дијагонала призме $8\sqrt{6}$ cm и са основом заклапа угао од 45° .

15. Ивице квадра односе се као 1 : 2 : 5, а његова дијагонала има дужину $5\sqrt{6}$ cm. Колика је површина квадра?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Збир основне ивице и висине правилне шестостране призме је 10 cm. Одредити P и V те призме, ако је дужа дијагонала призме најмања могућа.

2) Ивице квадра, чија је дијагонала 26 cm, а површина 72 cm^2 односе се као 3 : 4 : 12. Колике су ивице, а колика запремина ?

3) Одредити висину X правилне тростране призме којој је основна ивица дужине *a*, а запремина B = $a^3\sqrt{3}$.

ТЕМА 8.5.

КОНГРУЕНЦИЈЕ ПО МОДУЛУ

Предавач: Ивана Андрејић (Чачак)

За целе бројеве a и b каже се да су конгруентни по модулу m (m је цео број и m ≠ 0 и т ≠ 1), ако a и b при дељењу са m дају једнаке остатке. Симболички се то записује $a \equiv b \pmod{m}$. Ако a и b при дељењу са m имају различите остатке, онда се каже a није конгруентно b по модулу m и записује $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Тако је на пример $37 \equiv 12 \pmod{5}$, јер и 37 и 12 при дељењу са 5 имају остатак 2. Слично је и $2011 \equiv 1 \pmod{67}$, јер 2011 и 1 при дељењу са 67 дају остатак 1. Тачно је и да $56 \not\equiv 82 \pmod{3}$, јер 56 при дељењу са 3 даје остатак 2, а 82 при дељењу са 3 даје остатак 1.

овне особине конгруенција и многобојне њихове примене:

<u>11.</u> Ако је $a \equiv b \pmod{m}$, онда и само онда је $a - b$ дељиво са т. Докажи.

<u>2.</u> Релација конгруенције по модулу је сагласна са операцијама сабирања, одузимања, множења и степеновања (природним бројем):

- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, онда је $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, онда је $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, онда је $a\,c \equiv b\,d \pmod{m}$
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $n \in N$, онда је $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Без доказа наводимо и следеће особине релације конгруенције по модулу:

- Ако су x и y цели бројеви и ако је је $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, онда је и $ax + x \equiv bx + dy \pmod{m}$ (особина линеарности)
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$, онда постоји цео број q такав да је $a = mq + b$.
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, онда је и $ac \equiv bd \pmod{m}$ (особина мултипликативности)
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $P(x)$ полином са целим коефицијентима, онда је $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.
- Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $d \mid m$, онда је $a \equiv b \pmod{d}$.

Вероватно најчешће коришћена особина конгуенције са модулом је њена сагласност са степеновањем и лакоћа са којом се ова особина релације примењује уколико је $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ или $a^n \equiv -1 \pmod{m}$.

1. Докажи да је број $3^{2007} - 1$ дељив са 13 .
2. Колики је остатак при дељењу броја 2^{2011} са 13 ?
3. Да ли је број $2^{33} + 1$ прост или сложен?

4. Докажи да је $317^{259} - 8$ дељиво са 15.

5. Докажи да је број $2222^{5555} + 5555^{2222}$ дељив са 3 и 7.

6. Докажи да је број $3^{105} + 4^{105}$ дељив са 7.

7. Којом цифром се завршава број 7^{2020} ?

8. Која је последња цифра броја $(9^9)^9$, а која броја 9^{9^9} ?

9. Одреди последње две цифре броја 99^{12345}.

10. Које су последње две цифре броја 2^{100}?

11. Одреди последње три цифре збира: $1^{2021} + 2^{2021} + \ldots + 1000^{2021}$.

12. Ако је p непаран број, онда је број $2^p + 1$ дељив са 3. Доказати.

13. Одреди НЗД свих бројева облика $7^{2n} - 1$, ако је n природан број .

14. Ако су $к$, m и n природни бројеви, онда је број $5^{5к+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ дељив са 11. Доказати.

15. Постоји ли природан број n за који је израз $n^2 + 1$ дељив са 15 ?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) Одреди остатак при дељењу броја $3^{2021} + 4^{2021}$ са 11 и 13.

2) Које су последње две цифре броја $\left(\left(7^9\right)^9\right)^9$?

3) Докажи да је за сваки природан број n израз $7^{2n} - 4^{2n}$ дељив са 33.

ТЕМА 8.6.

НЕЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Предавач: др Душан Ђукић (Београд)

1. Решити једначину $xy = x + y + 120$ у скупу природних бројева.
2. Наћи све парове целих бројева x, y за које је $x^2 - y^2 = 127$.
3. Наћи све парове целих бројева a, b за које је $a^2 + ab = 6b^2 + 100$.
4. Решити једначину $x^3 - y^3 = 91$ у скупу природних бројева.
5. Решити једначину $x^3 + y^3 = 3xy + 17$ у скупу природних бројева.
6. Описати све тројке природних бројева a, b, c такве да је $a^2 + b^2 = c^2$.
7. Ако су a, b, c цели бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$, доказати да је abc дељиво са
8. $3 \cdot 4 \cdot 5$.

9. Наћи све природне бројеве a, b, c за које је $a! - b! = 2^c$.
10. Постоје ли цели бројеви x, y, z за које је $x^2 + y^2 + z^2 = 1234567$?
11. Постоје ли цели бројеви x, y, z за које је $x^4 + y^4 = z^4 + 5$?
12. Може ли се број $31 \cdot 16^{31}$ написати у облику збира 15 четвртих степена целих бројева?
13. Наћи све парове природних бројева x, y таквих да је $x^2 + xy + y^2 = 3^{100}$.
14. Постоје ли цели бројеви x, y за које важи $(x + y)^3 = 6x^2y + 1111$?
15. Наћи све тројке целих бројева x, y, z за које важи $x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.
16. Доказати да једначина $x^2 - 3y^2 = 1$ има бесконачно много решења у скупу N.
17. Доказати да једначина $x^2 \quad 3y^2 = 7$ нема целобројних решења.
18. Наћи све просте бројеве p, q за које је $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.
19. Одредити све парове простих бројева p, q за које је $3pq + 1$ куб природног броја.
20. Наћи све целе бројеве a, b, c, d такве да је $ab + cd = 1$ и $ac + bd = 2$.
21. Наћи све природне бројеве n за које је $2^n + 1$ квадрат природног броја.
22. Одреди све целе бројеве a, b за које је $4^a + 9 = 5^b$.

ТЕМА 8.7.

НЕЈЕДНАКОСТИ

Предавач: др Душан Ђукић (Београд)

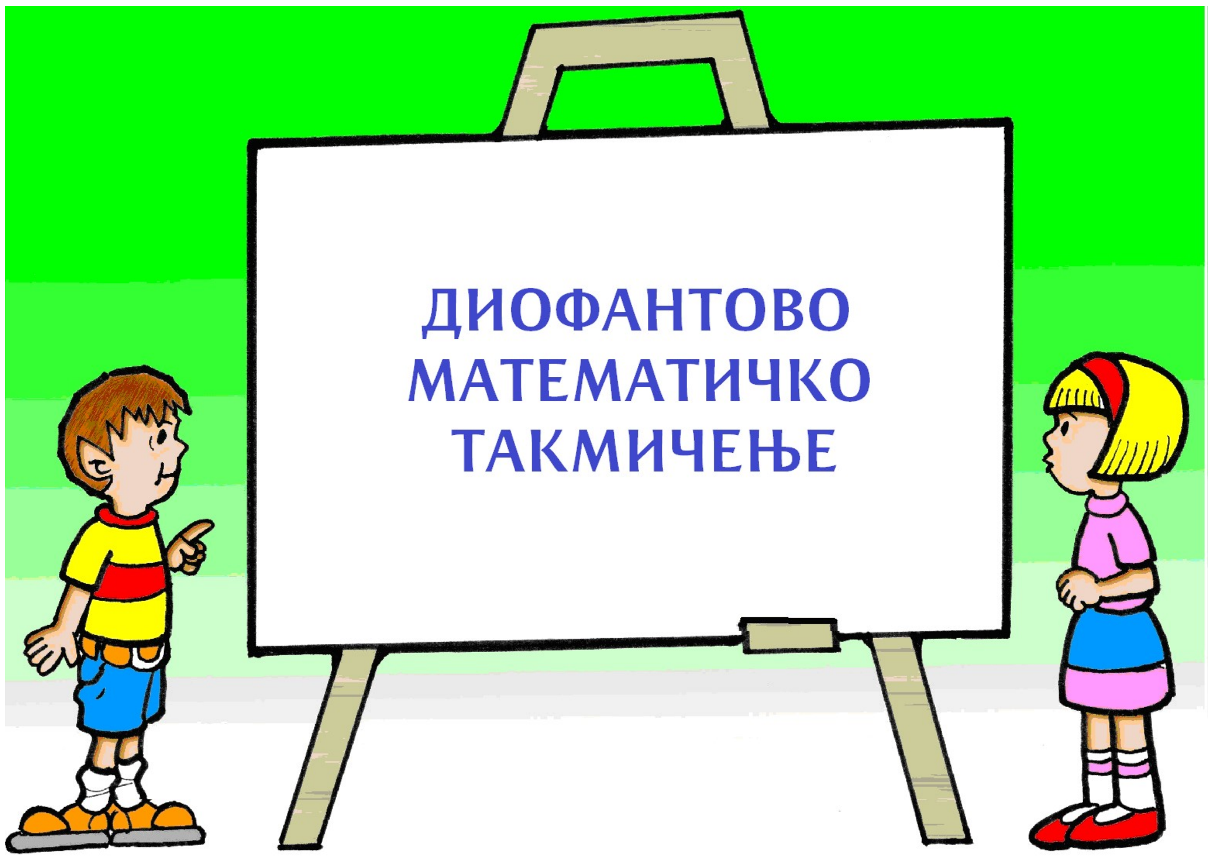
1. Доказати да важи $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}} < 19$.
2. Доказати да важи $\frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2} + \cdots + \frac{1}{199^2} < \frac{1}{200}$.
3. Доказати да за сваки реалан број x важи $x^2 + 3x \geq -\frac{9}{4}$.
4. Која је највећа могућа вредност израза $x - x^2$?
5. Доказати да за сваки реалан број x важи $x^3 + 1 \geq x^2 + x$.
6. Нека су x и y позитивни реални бројеви. Њихова *аритметичка*, *геометријска*, *квадратна* и *хармонијска* средина су (тим редом) $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $K = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ и $H = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Доказати да увек важи $K \geq A \geq G \geq H$.
7. Ако је $x > 0$, доказати да је $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Која је најмања могућа вредност израза $x + \frac{2}{x}$?
8. Ако су $0 \leq a, b \leq 1$, наћи најмању могућу вредност израза $5ab - a - b$.
9. Ако су x, y, z позитивни бројеви, доказати да важи $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

10. Доказати да за ма које бројеве $a, b, c \geq 0$ важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{2}(ab + bc)$. Може ли да важи једнакост ако a, b и c нису нула?
11. Која је најмања могућа вредност израза $x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$?
12. Ако су $a, b \geq 0$ и $a + b = 2$, доказати да важи $a^3 + b^3 \geq a^2 + b^2$.
13. Ако су a, b, c позитивни бројеви и $a^3 + b^3 = c^3$, доказати да је $a^4 + b^4 < c^4$.
14. Доказати да за сваки природан број n важи $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ и $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$.
15. Доказати да за сваки природан број n важи $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \leq n + 1 - \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$.
16. Ако су $a, b, c, d \geq 0$, доказати да важи (а) $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ и (б) $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.
17. У ствари, доказати да за произвољне позитивне бројеве $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ њихова аритметичка средина $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ није мања од њихове геометријске средине $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.
18. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.
19. Ако су $a, b, c > 0$ и $abc = 1$, доказати да важи $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8$.
20. Ако су $a, b, c > 0$ и $abc = 1$, доказати да важи $(2 + a)(2 + b)(2 + c) \geq 27$.
21. Ако је $x > 0$, која је најмања могућа вредност израза $x^2 + \frac{2}{x}$?
22. Ако су $a, b, c \geq 0$, доказати да је $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК:

1) Ако је $a + b = 1$, која је најмања могућа вредност израза $a^2 + ab + 2b^2$?
2) Доказати да за сваки реалан број x важи $x^3 \geq 3x - 2$.
3) Ако су a и b ма који позитивни бројеви, доказати да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ Диофант ВАЉЕВО


ДИОФАНТОВО
МАТЕМАТИЧКО
ТАКМИЧЕЊЕ

ДИОФАНТОВО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
12. 01. 2023.

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

3. РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза: 36 – 20 : 4 + 3 + 7 · 5 и заокружи тачан одговор:

   А) 81 Б) 54 **В) 69** Г) 42 Д) 75.

РЕШЕЊЕ: 36 – 20 : 4 + 3 + 7 · 5 = 36 – 5 + 3 + 35 = 69. Тачан одговор је В).

2. Дешифруј сабирање A + AB + ABC = 482 (ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима одговарају различите цифре). Израчунај A – B + C и заокружи тачан одговор:

   А) 10 Б) 9 В) 8 Г) 7 **Д) 6**.

РЕШЕЊЕ: Број A може бити 3 или 4.
Ако је A = 3, онда је 333 + B + BC = 482, па је B + BC = 149, што је немогуће, јер збир B + BC може бити највише 99 + 9 = 108.
Ако је A = 4, онда је 444 + B + BC = 482, па је B + BC = 38 и B = 3, а C = 5.
Тада је A – B + C = 4 – 3 + 5 = 6 и тачан је одговор Д).

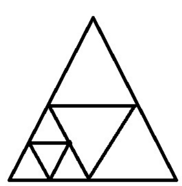
3. Дат је низ природних бројева 54, 44, 35, 27, 20 ... Одреди збир последња три члана датог низа (заокружи тачан одговор).

   А) 7 **Б) 16** В) 17 Г) 10 Д) 11.

РЕШЕЊЕ: Низ 54, 44, 35, 27, 20 ... добија се тако што се разлика два члана низа смањује за један, јер је 54 – 44 = 10, 44 – 35 = 9, 35 – 27 = 8, 27 – 20 = 7 ... То значи да су следећи чланови низа 20 – 6 = 14, 14 – 5 = 9, 9 – 4 = 5, 5 – 3 = 2. Низ нема виш чланова, јер би следећи био 2 – 2 = 0, а нула није природан број. Како је 2 + 5 + 9 = 16, тачан је одговор Б).

4. Колико троуглова има на слици? (заокружи тачан одговор)

   А) 6 Б) 7 В) 8 **Г) 9** Д) 10.



РЕШЕЊЕ: Малих троуглова има 4, средњих још 4 и велики је 1 троугао.
То је укупно 9 и тачан резултат је под Г)

5. Допуни магични квадрат:

25	**11**	**21**
15	19	**23**
17	**27**	13

РЕШЕЊЕ: Како је централни број 19, то је карактеристични збир $3 \cdot 19 = 57$, па се остали бројеви лако добијају допуњавањем хоризонтала, вертикала и дијагонала до 57.

4. РАЗРЕД

1. Израчунај колико цифара се употреби за нумерацију књиге која има 185 страна и заокружи тачан одговор:

   А) 438 **Б) 447** В) 555 Г) 370 Д) 456.

РЕШЕЊЕ: Књига која има 185 страна има 9 једноцифрених, 90 двоцифрених и 86 троцифрених страна. За нумерацију књиге потребно је $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 86 \cdot 3 = 9 + 180 + 258 = 189 + 258 = 447$ цифара. Тачан одговор је Б).

2. Дешифруј сабирање $A + AB + ABC + ABCC = 2023$ (ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима одговарају различите цифре), израчунај $B + C - A$ и заокружи тачан одговор:

   А) 6 Б) 7 В) 8 **Г) 9** Д) 10.

РЕШЕЊЕ: Број A не може бити 2, јер би онда у старту имали 2222 што је веће од 2023. Дакле $A = 1$ и тада је $1111 + B + BC + BCC = 2023$, тј. $B + BC + BCC = 2023 - 1111 = 912$. Очигледно број B није 9, јер би тада збир био већи од 999, па је број $B = 8$. Сада је $8 + 88 + 800 + C + CC = 912$, па је $C + CC = 912 - 888 = 24$ и $C = 2$.
Тада је $B + C - A = 8 + 2 - 1 = 9$, па је тачан одговор Г.

3. Аца, Бошко и Вељко имају заједно 1599 динара. Аца има три пута мање новца од Бошка, а Вељко има 3 пута више новца од Бошка. Колико новца имају Аца и Вељко заједно? Заокружи тачан одговор.

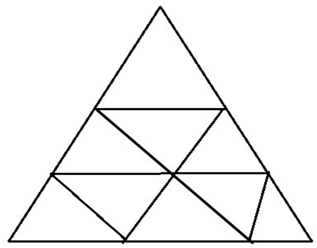
   А) 1230 Б) 1320 В) 1200 Г) 1107 Д) 1260.

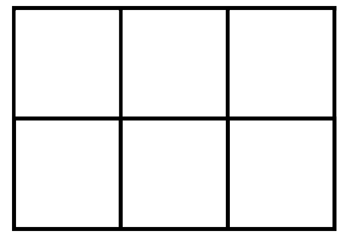
РЕШЕЊЕ: Најмање новца има Аца. Нека је његова сума x. Бошко има три пута више то јест 3x. Вељко има три пута више од Бошка, тј. 9x. Како је $x + 3x + 9x = 13x = 1599$, то је $x = 1599 : 13 = 123$ динара. Значи да Аца и Вељко имају $x + 9x = 10x = 10 \cdot 123 = 1230$ динара. Тачан одговор је А).

4. Колико троуглова има на слици (лево)? (заокружи тачан одговор)?

РЕШЕЊЕ: На слици има 9 малих. 3 средња и један велики троугао, што је укупно $9 + 3 + 1 = 13$ троуглова, па је тачан одговор Д)

   А) 9 Б) 10 В) 11 Г) 12 **Д) 13**.





5. Правоугаоник чији је обим 120 cm је са три праве подељен на 6 једнаких (подударних) квадрата (слика десно). Израчунај обим и површину једног од тих квадрата.

РЕШЕЊЕ: Ако страница добијеног квадрата има дужину x, онда је обим правоугаоника $3x + 2x + 3x + 2x = 10x = 120$ cm, па је $x = 120 : 10 = 12$ cm. Обим квадрата је $4 \cdot 12 = 48$ cm, а површина је $12 \cdot 12 = 144\ cm^2$.

5. РАЗРЕД

1. Одреди збир елемената скупа B, ако је: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$ и $A / B = \{1, 5\}$. Заокружи тачан одговор:

   А) 12 Б) 13 В) 14 Г) 15 **Д) 16.**

РЕШЕЊЕ: Како је $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$ и $A / B = \{1, 5\}$, јасно је да скупу B припадају бројеви 2, 3, 4 и 6, па је њихов збир једнак $2 + 3 + 5 + 6 = 16$.
Тачан одговор је Д).

2. Дата је једначина $3p + 5q = 74$ (p и q су прости бројеви). Решење једначине је пар простих бројева p и q који задовољавају дату једначину. Одреди колико решења има дата једначина у скупу простих бројева и заокружи тачан одговор:

   А) 0 Б) 1 **В) 2** Г) 3 Д) 4.

РЕШЕЊЕ: Из једнакости $3p + 5q = 74$ јасно је да су бројеви p и q непарни и да је $5q < 74$, што значи да је $q < 15$ и $q \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Ако је $q = 3$, онда је $3p = 74 - 15 = 59$ и нема решења. Ако је $q = 5$, онда је $3p = 74 - 25 = 49$ и нема решења. Ако је $q = 7$, онда је $3p = 74 - 35 = 39$ и $p = 13$. Ако је $q = 11$, онда је $3p = 74 - 55 = 19$ и једначина нема решења. Ако је $q = 13$, онда је $3p = 74 - 65 = 9$, па је $p = 3$, што значи да постоје два решења (13, 7) и (3, 13).
Тачан одговор је В).

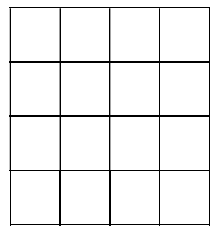
3. Дужине ивица квадра су три узастопна природна броја. Запремина квадра је $336\ cm^3$. Одреди површину квадра и заокружи тачан одговор:

   А) $336\ cm^2$ Б) $360\ cm^2$ **В) $292\ cm^2$** Г) $288\ cm^2$ Д) $432\ cm^2$.

РЕШЕЊЕ: Како је запремина квадра $336 = 6 \cdot 56 = 6 \cdot 7 \cdot 8$, то су ивице квадра 6 cm, 7 cm и 8 cm, а његова површина $2(6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 6) = 2(42 + 56 + 48) = 2 \cdot 146 = 292\ cm^2$. Тачан је одговор В).

4. Број дужи које видиш на слици једнак је x, а број квадрата које видиш на слици једнак је y. Одреди број x + y и заокружи тачан одговор.

А) 120 Б) 125 **В) 130** Г) 134 Д) 140.



РЕШЕЊЕ: На свакој од 5 хоризонталних и 5 вертикалних дужи има по $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ дужи, па је укупан број дужи $x = 100$. На слици има 16 квадрата странице 1, 9 квадрата странице 2, 4 квадрта странице 3 и 1 квадрат странице 45. То је укупно $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ квадрата, па је тачан одговор В).

5. Шта је веће: $\frac{6}{7}$ или $\frac{7}{8}$? Образложи решење.

РЕШЕЊЕ: Ако се први разломак прошири са 8, а други са 7, добијају се разломци

$\frac{6}{7} = \frac{48}{56}$ и $\frac{7}{8} = \frac{49}{56}$. Како је $48 < 49$, то је и $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$.

6. РАЗРЕД

1. Два унутрашња угла у троуглу су 20^o и 40^o. Одреди угао под којим се секу симетрале најмањег и највећег спољашњег угла тог троугла. Заокружи тачан одговор:

А) 50^o Б) 60^o В) 65^o **Г) 70^o** Д) 72^o.

РЕШЕЊЕ: Највећи угао у троуглу је $180^o – 20^o – 40^o = 120^o$. Највећи спољашњи угао је 160^o, а најмањи спољашњи угао је 60^o. Њихове симетрале деле те углове на углове од 80^o и 30^o, па се те симетрале секу под углом $180^o – 80^o – 30^o = 70^o$. Тачан је одговор Г).

2. Дата је једначина $x \cdot x + 2y = 29$ (x и y су природни бројеви). Решење једначине је пар природних бројева x и y који задовољавају дату једначину. Одреди колико решења има дата једначина у скупу природних бројева и заокружи тачан одговор:

А) 0 Б) 1 В) 2 **Г) 3** Д) 4.

РЕШЕЊЕ: Како је број $2y$ паран, то је $x \cdot x$ непаран број мањи од 29. То значи да је x једнако 1, 3, или 5. Ако је $x = 1$, онда је $2y = 28$ и $y = 29 – 1 = 14$. Ако је $x = 3$, онда је $2y = 29 – 9 = 20$ и $y = 10$. Коначно ако је $x = 5$, онда је $2y = 29 – 25 = 4$ и $y = 2$. Постоје 3 решења, па је тачан одговор Г).

3. Одреди на колико различитих начина се број 15 може представити као збир неколико (најмање два) узастопних целих бројева (заокружи тачан одговор):

А) 4 Б) 5 В) 6 **Г) 7** Д) 8.

РЕШЕЊЕ: Како је 15 = 7 + 8 = (– 6) + (– 5) + ... 5 + 6 + 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = (– 3) + (– 2) + ... + 3 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (– 14) + (– 13) + ... 13 + 14 + 15, то има 7 таквих случајева. Тачан одговор је Г).

4. У једној кутији има 14 црвених, 15 плавих и 16 белих куглица. Колико најмање куглица треба извући да би смо били сигурни да имамо три куглице различитих боја. Заокружи тачан одговор.

А) 16 Б) 18 В) 30 Г) 31 **Д) 32.**

РЕШЕЊЕ: Да би били сигурни да постоје три углице исте боје треба извући најмање 15 + 16 + 1 = 32 куглице, јер ако би број куглица био 31, онда би било могуће да има само две врсте куглица (плаве и беле). Тачан одговор је Д).

5. Три молера за 4 дана окрече 5 станова.

а) Колико станова окречи 7 молера за 12 дана?

б) За колико дана 22 молера окречи 55 станова?

в) Колико молера је потребно да за 21 дан окрече 70 станова?

РЕШЕЊЕ: Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова то значи да је за кречење 5 станова потребно 12 дневница, тј. да је за кречење 1 стана потребно 5/12 дневнице.

а) Тада за 7 молера за 12 дана (84 дневнице) окрече $84 \cdot \frac{5}{12} = 7 \cdot 5 = 35$ станова.

б) Ако има 22 молера и ако они крече x дана, онда је $22 \cdot \frac{5}{12} \cdot x = 55$ и x = 6 дана.

в) Ако има y молера, онда они за 21 дан окрече $21 \cdot \frac{5}{12} \cdot y = 70$ и $y = 8$ молера.

7. РАЗРЕД

1. Последња цифра броја $A = 6^{2023} + 7^{2022} + 8^{2021} + 9^{2020}$ је (заокружи тачан одговор):

А) 2 Б) 0 В) 6 **Г) 4** Д) 8.

РЕШЕЊЕ: Број 6^{2023} се завршава цифром 6, а број 7^{2022}, као и број 7^2 цифром 9. Број 8^{2021} се завршава истом цифром као и 8^1, а то је 8 и коначно број 9^{2020} се завршава цифром 1. Број А се завршава цифром 6 + 9 + 8 + 1, а то је цифра 4. Тачан одговор је Г).

2. Катете правоуглог троугла су 15 и 20. Полупречник круга уписаног у тај правоугли троугао је (заокружи тачан одговор):

А) 3,5 Б) 4 В) 4,5 **Г) 5** Д) 6.

РЕШЕЊЕ: Из Питагорине теореме се добија да је хипотенуза тог троугла једнака 25. Како је полупречник уписаног круга r = (a + b – c) : 2 = (15 + 20 – 25) : 2 = 5. Тачан је одговор Г).

3. Дати су изрази: $x = (20^{30})^{40}$, $y = (30^{40})^{20}$ и $z = (40^{30})^{20}$. Заокружи тачно тврђење:

А) $x < y < z$ Б) $x < z < y$ В) $y < x < z$ Г) $y < z < x$ **Д) $z < y < x$.**

РЕШЕЊЕ: Број $x = (20^{30})^{40} = 20^{1200} = (4 \cdot 5)^{1200} = 2^{2400} \cdot 5^{1200}$. Број $y = (30^{40})^{20} = 30^{800} = (3 \cdot 2 \cdot 5)^{800} = 2^{800} \cdot 3^{800} \cdot 5^{800}$. Број $z = (40^{30})^{20} = 40^{600} = (8 \cdot 5)^{600} = 2^{1800} \cdot 5^{600}$. Како је $x - y = 2^{2400} \cdot 5^{1200} - 2^{800} \cdot 3^{800} \cdot 5^{800} = 2^{800} \cdot 5^{800} (2^{1600} \cdot 5^{400} - 3^{800}) > 0$, то је $x > y$. Слично је $y - z = 2^{800} \cdot 3^{800} \cdot 5^{800} - 2^{1800} \cdot 5^{600} = 2^{800} \cdot 5^{600} (3^{800} \cdot 5^{200} - 2^{1000}) > 0$, па је $y > z$.
Како је $x > y > z$, то је тачан одговор Д).

4. Дата је једнакост $\sqrt{\dfrac{1{,}222222...}{0{,}818181,,,}} = \dfrac{x}{y}$ где су x и y узајамно прости природни бројеви.

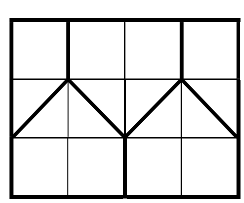
Разлика бројева x и y једнака је (заокружи тачан одговор).

А) 1 **Б) 2** В) 3 Г) 9 Д) 11.

РЕШЕЊЕ: Ако је $a = 1{,}2222...$, онда је $10a = 12, 2222...$, па је $10a - a = 9a = 11$, што значи да је $a = 11/9$. Слично, ако је $b = 0{,}818181$ ..., онда је $100b = 81{,}818181$, па је $100b - b = 99b = 81$, па је $b = 81/99 = 9/11$. Тада је $\sqrt{\dfrac{1{,}222222...}{0{,}818181,,,}} = \sqrt{\dfrac{\frac{11}{9}}{\frac{9}{11}}} = \dfrac{11}{9} = \dfrac{x}{y}$. Следи да је $x - y = 11 - 9 = 2$, па је тачан одговор Б).

5. У правоугаоник чије су димензије 3 x 4 на случајан начин је размештено 6 тачака. Доказати да при ма ком распореду тачака постоје две тачке чије је растојање мање од $\sqrt{5}$.

РЕШЕЊЕ: Ако дати правоугаоник 3 x 4 подели на „кућице“, онда се добију 3 „кућице“ и 2 „полукућице (види слику). У свакој „кућици“ и „полукућици“ највеће могуће растојање између две тачке је $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Како постоји 6 тачака, а 5 „кућица“ на основу Дирихлеовог принципа (6 : 5 = 1(1)), постоји „кућица“ у којој се налазе бар две тачке. Растојање између те две тачке је мање од $\sqrt{5}$.



8. РАЗРЕД

1. Дата је једначина $\frac{x-7}{2023} = \frac{x-12}{2018}$. Решење дате једначине припада интервалу (заокружи тачан одговор):

   А) (2020, 2021) Б) (2023, 2024] **В) [2030, 2031)** Г) [2026, 2029] Д) (2034, 2036).

РЕШЕЊЕ: Дата једначина је еквивалентна са једначином $2018(x-7) = 2023(x-12)$, па је $2018x - 14126 = 2023x - 24276$. Тада је $5x = 10150$, па је $x = 2030$ и тачан одговор је В).

2. Запремина квадра је 1320 cm^3, а мерни бројев ивица квадра су три узастопна природна броја. Тада је дужина дијагонале квадра једнака (заокружи тачан одговор):

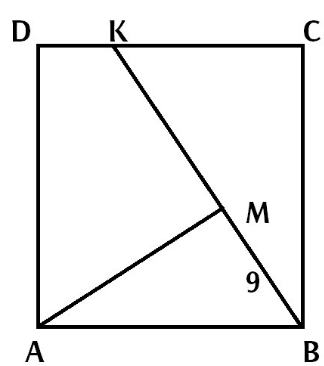
   А) 18 Б) 19 В) $\sqrt{347}$ **Г)** $\sqrt{365}$ Д) $\sqrt{379}$.

РЕШЕЊЕ: Како је $1320 = 10 \cdot 132 = 10 \cdot 11 \cdot 12$. Ако је дијагонала квадра једнак x, онда је $x^2 = 102 + 112 + 122 = 100 + 121 + 144 = 365$, па је x = $\sqrt{365}$ и тачан је одговор Г).

3. У унутрашњој области квадрата ABCD дата је тачка M, тако да је угао AMB прав, а BM = 9cm. Права BM пресеца дуж CD у тачки K тако да је CK : DK = 3 : 1. Тада је површина датог квадрата једнака (заокружи тачан уговор):

   А) 196 Б) 200 **В) 225** Г) 256 Д) 289.

РЕШЕЊЕ: Нека је страница квадрата једнак 4x. Тада је дуж CK = 3x. Правоугли троуглови ABM и BCK су слични (јер су им једнаки сви углови), па важи пропорциопналност катета: AM : BM = BC : KC. Тада је AM : 9 = 4x : 3x и AM = 36x : 3x = 12. Из Питагорине теореме је AB^2 = AM2 + BM2 = $12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, па је побршина квадрата једнака 225.
Тачан је одговор В).



4. Колико има петоцифрених природних чији производ цифара је једнак 0?

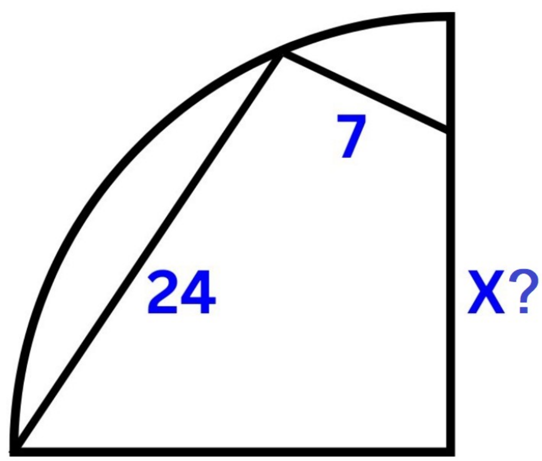
   А) 45000 Б) 80000 В) 54321 **Г) 30951** Д) 59049.

РЕШЕЊЕ: Петоцифрених бројева има укупно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$. Петоцифрених бројева чији декадни запис не садрже ни једну нулу има $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 729 = 59049$.

То значи да бројева чији декадни запис садржи бар једну нулу, па према томе и чији је производ цифара једнак 0 има $90000 - 59049 = 30951$. Тачан је одговор Г).

5. Девојка Шехерезада треба да цару исприча 1001 бајку. Неких ноћи она прича 3, а неких ноћи 5 бајки. На колико начина она то може да уради? Како најбрже она то може да уради? Колико највише ноћи она може причати бајке?

РЕШЕЊЕ: Нека је број ноћи у којима Шехерезада прича по 3 приче x, а број ноћи у којима прича 5 прича y. Тада је $3x + 5y = 1001$ и једно целобројно решење дате једначине је $x_o = 332$, $y_o = 1$ (јер је $3 \cdot 332 + 1 \cdot 5 = 996 + 5 = 1001$). Опште решење добијене линеарне Диофантове једначине је $x = 332 - 5к$, $y = 1 + 3к$ ($к$ је неки цео број). Како x и y морају бити природни бројеви то је $x = 332 - 5к > 0$ и $y = 1 + 3к > 0$. Следи да је $к \leq 66$ и $к \geq 0$, па има 67 различитих начин да Шехерезада исприча бајке.
Најбржи је онај за који је $к = 66$, па је $x = 2$ и $y = 199$ и тада је потребна $199 + 2 = 201$ ноћ.
Најдуже се бајке могу причати када је $к = 0$, па је $x = 332$ и $y = 1$ и то је 333 ноћи.



РЕЗУЛТАТИ ДИОФАНТОВОГ МАТЕМАТИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

3. РАЗРЕД

РБ	ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	РАЗ	БРОЈ БОДОВА	ПРИЗНАЊЕ
1.	Ива Вилотијевић	3	100	ЗЛАТНА МЕДАЉА
2.	Антонина Ружичић	3	80	СРЕБРНА МЕДАЉА
3.	Даница Мајсторовић	3	60	БРОНЗАНА МЕДАЉА
4.	Лена Стевановић	3	60	ДИПЛОМА
5.	Николина Ружичић	3	60	ДИПЛОМА
6.	Андреј Вујовић	3	60	ДИПЛОМА

4. РАЗРЕД

1.	Анђелија Сталовић	4	100	ЗЛАТНА МЕДАЉА
2.	Наталија Недовић	4	100	СРЕБРНА МЕДАЉА
3.	Андреј Крајиновић	4	100	БРОНЗАНА МЕДАЉА
4.	Деспот Лазовић	4	98	ДИПЛОМА
5.	Давид Ковачевић	4	95	ДИПЛОМА

5. РАЗРЕД

РБ	ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	РАЗ	БРОЈ БОДОВА	ПРИЗНАЊЕ
1.	Селена Петровић	5	80	ЗЛАТНА МЕДАЉА
2.	Виктор Савић	5	80	СРЕБРНА МЕДАЉА
3.	Михајло Јанић	5	80	БРОНЗАНА МЕДАЉА
4.	Матаија Чакаревић	5	75	ДИПЛОМА

6. РАЗРЕД

1.	Лазар Ћосић	6	100	ЗЛАТНА МЕДАЉА
2.	Никола Мијаиловић	6	100	СРЕБРНА МЕДАЉА
3.	Љубица Каранац	6	80	БРОНЗАНА МЕДАЉА
4.	Јана Марковић	6	60	ДИПЛОМА
5.	Јован Ружичић	6	60	ДИПЛОМА

7. РАЗРЕД

РБ	ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	РАЗ	БРОЈ БОДОВА	ПРИЗНАЊЕ
1.	Софија Мићевић	7	82	ЗЛАТНА МЕДАЉА
2.	Димитрије Јанић	7	82	СРЕБРНА МЕДАЉА
3.	Коста Ненковић	7	82	БРОНЗАНА МЕДАЉА
4.	Марко Станковић	7	62	ДИПЛОМА
5.	Милан Костић	7	62	ДИПЛОМА

8. РАЗРЕД

1.	Алекса Гавриловић	8	100	ЗЛАТНА МЕДАЉА
2.	Душан Ђорђевић	8	85	СРЕБРНА МЕДАЉА
3.	Теодора Драмићанин	8	73	БРОНЗАНА МЕДАЉА
4.	Тијана Милић	8	70	ДИПЛОМА

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО


РЕЗУЛТАТИ ТУРНИРА
У ТОКУ
ЗИМСКЕ ШКОЛЕ

ТУРНИР У СЛАГАЊЕ РУБИКОВЕ КОЦКЕ

1. Алекса Гавриловић (златна медаља)
2. Василије Вучковић (сребрна медаља)
3. Андреј Крајиновић (бронзана медаља)
4. Немања Додевски (диплома)

СУДОКУ ТУРНИР

1. Вања Бекировић (златна медаља)
2. Никола Мијаиловић (сребрна медаља)
3. Јован Ружичић (бронзана медаља)
4. Немања Додевски (диплома)

ШАХОВСКИ ТУРНИР

1. Лука Грујанац (златна медаља)
2. Марко Станковић (сребрна медаља)
3. Милан Костић (бронзана медаља)
4. Василије Вучковић (диплома)

МИЦА ТУРНИР

1. Јован Ружичић (златна медаља)
2. Филип Јоцовић (сребрна медаља)
3. Милан Костић (бронзана медаља)
4. Дуња Бурмаз (диплома)

ТУРНИР У СТОНОМ ТЕНИСУ

1. Павле Капларевић (златна медаља)
2. Димитрије Јанић (сребрна медаља)
3. Лазар Ћосић (бронзана медаља)

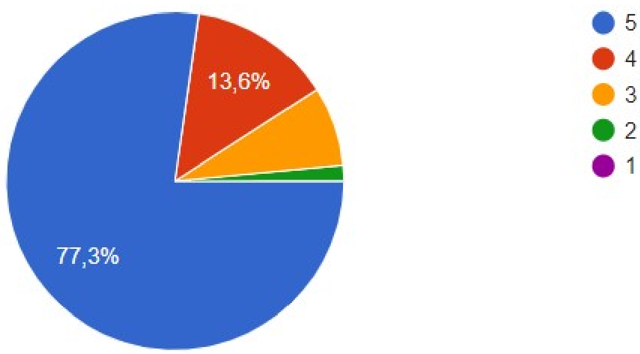

РЕЗУЛТАТИ
АНОНИМНЕ
АНКЕТЕ

У анкети је учествовало 66 учесника.
Графикони и статистика реализована аутоматски, сотвером који је уграђен у Google упитнике.
У анкети је присутно 912 позитивних и 12 негативних оцена.
Анкета се приказује без коментара.

РЕЗУЛТАТИ ПО ПИТАЊИМА

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените квалитет информација које сте добили пре ЗШММ - Чачак 2023.

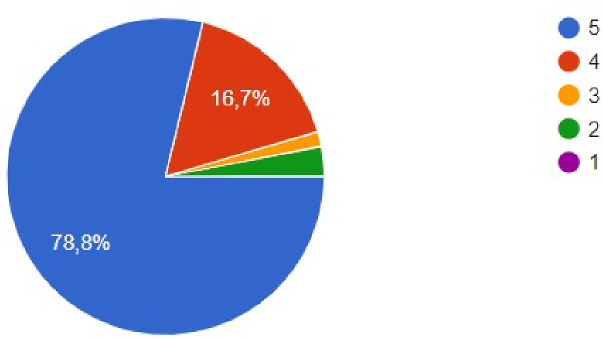
66 одговора



Просечна оцена је 4,67

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените свечано отварање ЗШММ - Чачак 2023.

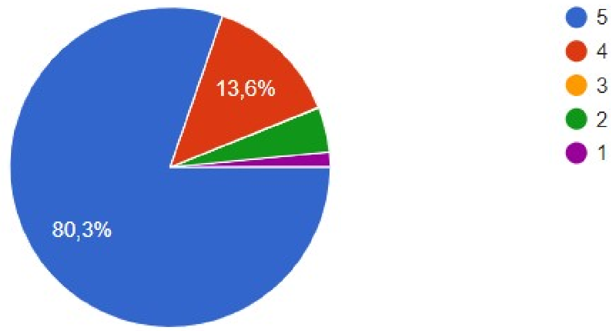
66 одговора



Просечна оцена је 4,72

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените квалитет наставе у ЗШММ - Чачак 2023.

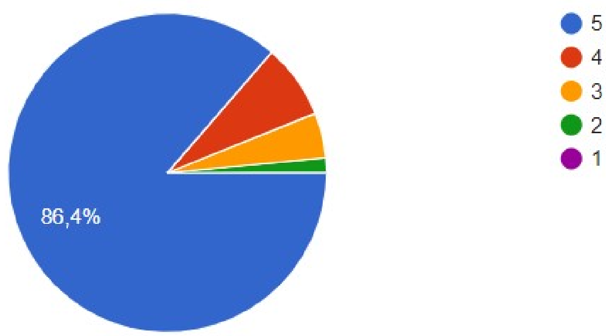
66 одговора



Просечна оцена је 4,67

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените квалитет ваннаставних активности (мица, шах, судоку, стони тенис, Рубикова коцка, квиз...) у ЗШММ - Чачак 2023.

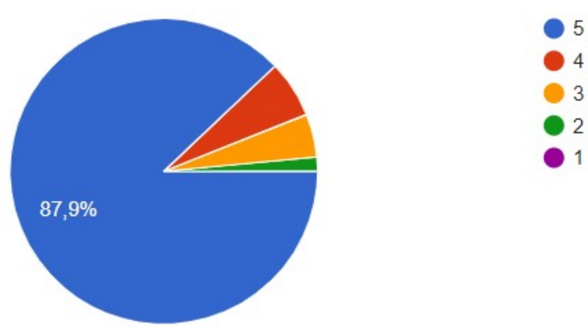
66 одговора



Просечна оцена је 4,79

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените Диофантово математичко такмичење у ЗШММ - Чачак 2023.

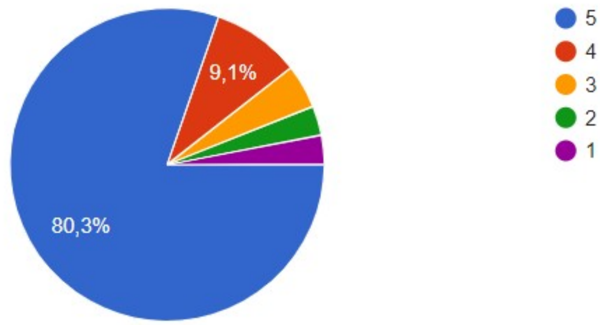
66 одговора



Просечна оцена је 4,81

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените шетње које су реализоване у оквиру ЗШММ - Чачак 2023.

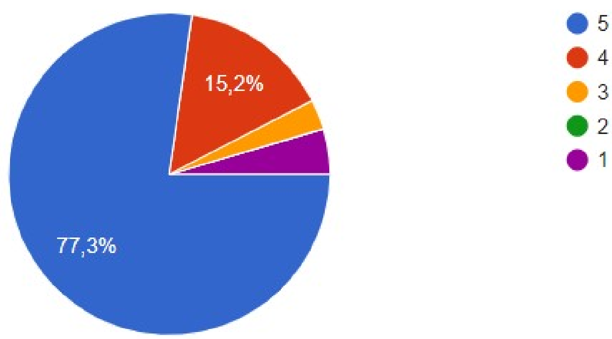
66 одговора



Просечна оцена је 4,61

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените ефекте домаћих задатака и квалитет њихове анализе у оквиру ЗШММ - Чачак 2023.

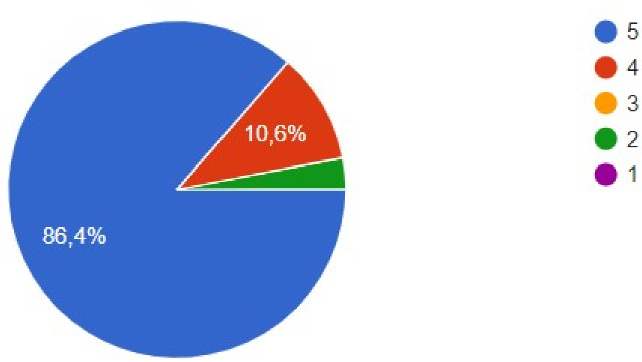
66 одговора



Просечна оцена је 4,61

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените квалитет Завршне свечаности у ЗШММ - Чачак 2023.

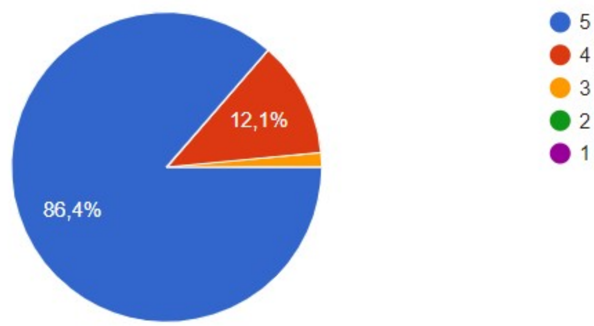
66 одговора



Просечна оцена је 4,81

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените квалитет смештаја у ЗШММ - Чачак 2023.

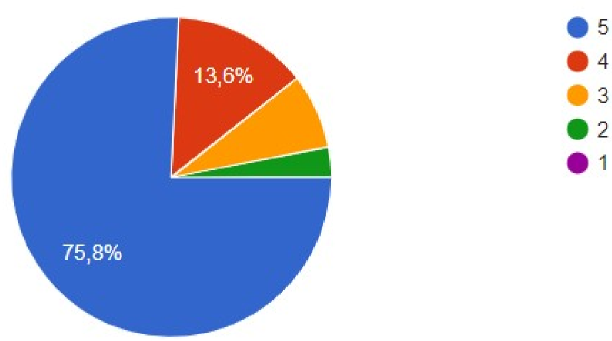
66 одговора



Просечна оцена је 4,85

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените квалитет исхране у ЗШММ - Чачак 2023.

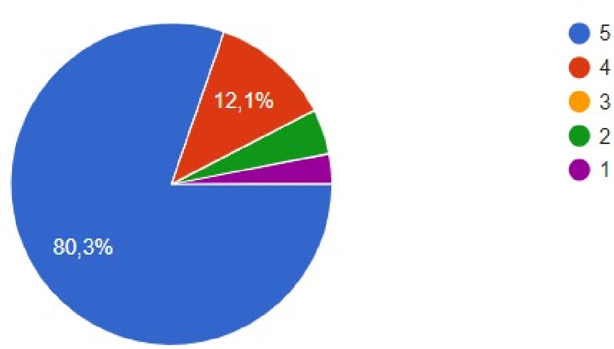
66 одговора



Просечна оцена је 4,63

Оценама од 5 (најбоља) до 1 (најслабија) оцените информације које сте добијали сваког дана у оквиру ЗШММ - Чачак 2023.

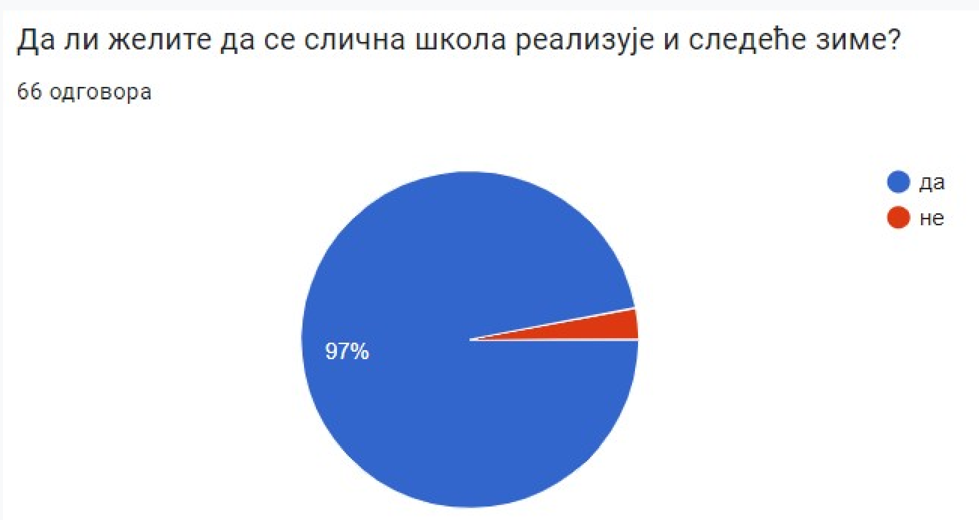
66 одговора



Просечна оцена је 4,63

Просечна оцена је 4,63

Просечна оцена је 4,76



Да – 64 одговора; Не – 2 одговора

ПОЈЕДИНАЧНИ КОМЕНТАРИ

Коментари су дати црним фонтом и нису исправљане ни словне ни правописне грешке, а није ни вршена конверзија (ћирилица – латиница).
Одговори на поједине коментаре дати су црвеним фонтом

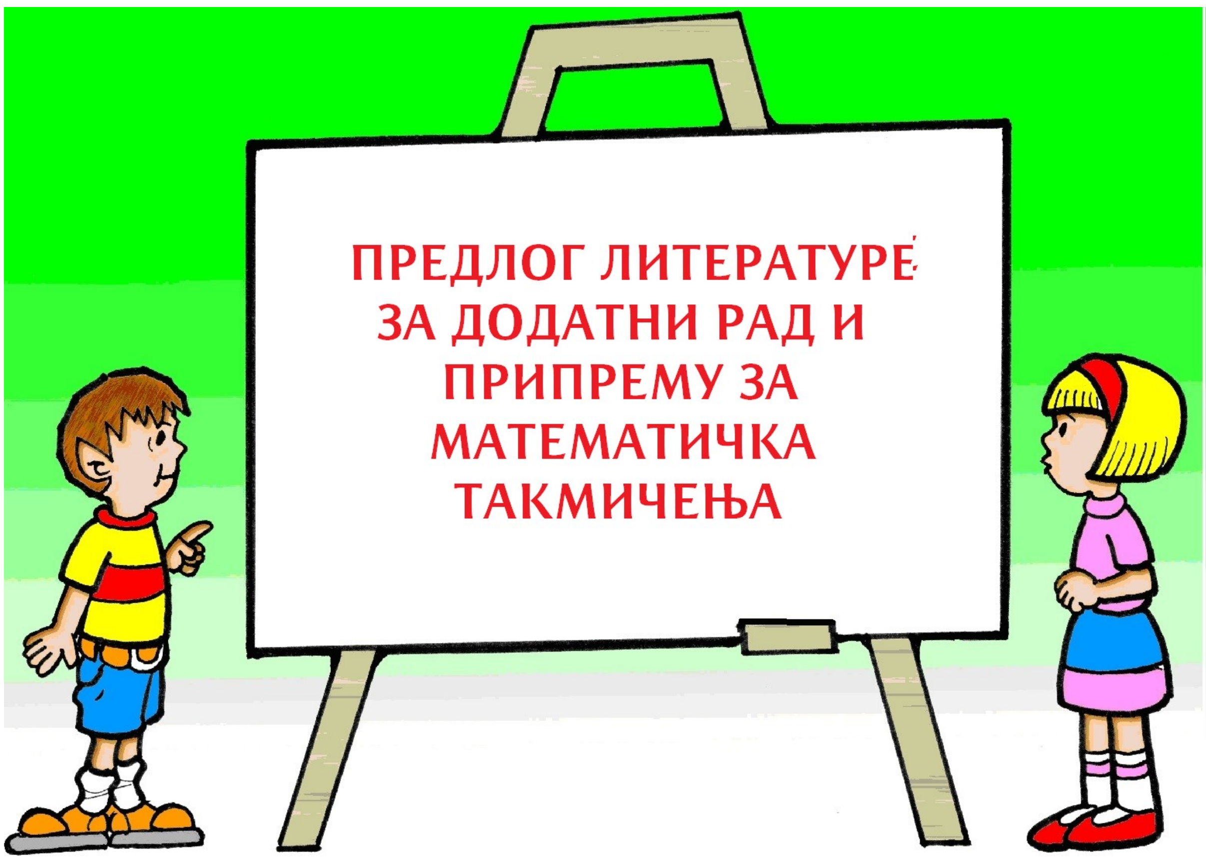
- Све је било одлично
- Deca su prezadovoljan, sve je bilo lepo organizovano. Sve pohvale.
- Zamerka je termin realizacije časova, jer je svaki dan menjan.
  Термини су прилагођавани гостујућим предавачима и другим наставним потребама.
- Увести спорт
  Лети да, а зими како? Дом ученика нема фискултурну салу.
- Svaka cast na organizaciji!
- Mi smo iz Cacka i prezqdovoljni smo skolicom prava stvar za decu , za druzenje ,ucenje nova poznanstva. Nadamo se i sledece godine
- Зимска школа је одличан начин да деца поред игре и дружења додатно прошире своја знања. Хвала Вам
- Moje dete ,koje je ucestvovalo u vašoj školi je zadovoljno svim aktivnostima,predavanjima,odnosom nastavnika i učesnika,i ucestvovala bi u nekoj slicnoj skoli,ukoliko bi bila organizovana.Sve pohvale.
- Vasa skola je savrseno mesto za napredovanje dece.Hvala Vam sto ste ovo organizovali ,vidimo se na narednim predavanjima.Molim Vas da nas obavestite o sledecem organizovanju. Srdacan pozdrav!
- Утисци, од самог пријема, боравка, предавања па до одласка, су одлични. Изабране теме и квалитет наставе су такође за највишу оцену. Остварени контакти међу полазницима и са предавачима ЗШММ су непроцењиви. Једно велико искуство за будуће математичаре. Такође све похвале заслужује особље Дома учененика на посвећености и љубазности. Било је велико задовољство учествовати на ЗШММ, и радујемо се даљој сарадњи.
- Svaka cas, sve je bilo super. Jedino nedostaje malo vise reklame i popularizacije. Skole informacije, ako su dobile, nisu prosledile. Ja sam, kao roditelj, slucajno saznala za ZSMM. U Cacku je super, verujem da ce i sam grad podrzati ovakve i slicne dogadjaje, pa moze opet na istoj lokaciji. Sve najbolje.
- Pun pogodak.Sve najbolje
- Све најлепше
- Nemam primedbi.
- Да ЗШММ уместо 6 дана траје 10 дана.
  Лепо речено, али тешко изводљиво из више разлога (празници, трајање распуста, неуједначени календари, цена ...)
- Odlicno organizovano,kvalitetno,korisno!Dete je odusevljeno a samim tim i mi roditelji
- Sve pohvale za organizaciju
- Veoma prijatno iskustvo

- Сматрам да је анализа домаћег задатка могла бити мало детаљнија. Није ми се допао начин вредновања такмичења, јер 100 бодова је исто пошто ово није такмичење из атлетике него из математике. Сви са 100 су могли добити диплому за 1.место, а они од 100-90 су се могли рангирати.
  Примедба око домаћих задатака је прихваћена.
  Што се тиче такмичења и брзина је знање. Ми смо се определили да селекцију извршимо на основу броја бодова (а да резервни параметар буде време). Алтернатива је била да дамо један тежак задатак, па да он изврши селекцију. Тада вероватно не било преклапања на 100 бодова.
- Sve je bilo apsolutno sjajno. Možda bi u delu vannastavnih aktivnosti, pored šaha, Rubikove kocke, mice...trebalo ponuditi učenicima i neku radionicu u okviru koje bi bio ponuđen spoj, recimo matematike i umetnosti ili arhitekture... Sve najbolje u daljem radu, sjajni ste! Svaka čast profesoru Andriću na idejama, energiji i posvećenosti, kao i svim kolegama na profesionalizmu!
- Учествовање на ЗШММ - Чачак 2023. је оставило само позитивне утиске и жељу да учествујем поново, почевши од свега новог што сам научила, нових познанстава, дружења... Све је једно незаменљиво искуство. Хвала много и надам се да ће што више деце и у будуће желети да учествује у зимским и летњим школама.
- Одлично
- Волела бих да се некако организује и за средње школе, јер ћу следеће године ићи у средњу и нећу бити у могућности да похађам ЗШММ.
- Predlog: učesnici Diofantovig takmičenja mogli bi da dobiju analizu zadataka (mejlom) i uoče svoje greške, kako ih ne bi ponavljali. Hvala!
  Изложили смо резултате.
  У овом Билтену имате и решења свих задатака.
- Spojili ste druzenje i ucenje. Sve pohvale, samo tako nastavite!
- Trebe prilagoditi uzrastu nastavnike koji predaju u skoli,deca nisu shvatila na predavanjima zadatke,brzo se prelazi i ne mogu da razumeju,a zadatci su komplikovani.To nije samo moj utisak ,vec dosta roditelja sa kojima sam razgovarala.Kontaktirala sam privatno profesore matematike da mi pomognu u resavanju zadataka i oni nisu bas brzo i sve resili.Moje dete je treci razred.a prof.su tesko resavali njihov nivo zadataka. Zamislite kako je deci kad njima nije lako,a jos ne zna da im se prenese objasnjenje zadatka.
  Поново сам прегледао теме за трећи разред. За обдарене ученике мислим да ту не би требало да буде проблема. Што се тиче приватних професора немам коментара, али мислим да је боље било да нама сигнализирате проблем, јер ми би га сигурно решили (било накнадним објашњењима, био понављањем нејасних партија). Мислим да је проблем у разлици између школских и тема које су рађене у Зимској школи. Теме у ЗШММ у многоме превазилазе оно што се у школи ради обично на основном или средњем нивоу, јер ове су теме везане и предвиђене за математичка такмичења.
- Bilo bi lepo kada bi bila i letnja škola
  Биће и летња школа, али вероватно не у Чачку.
- Nemam primedbi, sve je bilo u najboljem redu.
- Није ми се једино свидело то што се наставница ....није лепо односила према нама на настави. Иначе ми се све остало свидело.
- Jedno lepo iskustvo...želimo da se i dalje raealizuje ovakav vid nastave sa kvalitetnim edukatorima.

- Sve je bilo odlicno!!!
- Dosadnoooo je mnogoooo i nastavnici neznaju da objaśnjavaju
  Dosadno, nastavnici nisu lepo objašnjavali i nista nam nije jasno
  Једна иста особа два пута попунила анкету. Колико је у праву показују коментари осталих учесника анкете. Једна тема у 6. разреду није била прилагођена узрасту ученика, а наставница није знала да 6. разред није учио алгебарске трансформације.
- Све је било ОК
- Zadovoljan sam stečenim znanjem.
- Као родитељ веома сам одушевљена, инпресионирана и презадовољна организацијом, ентузијазмом и посвешћеношћу свих наставника Зимске школе младих математичара, као и стеченим знањем и постигнутим резултатима. Све похвале!
- She dobro Sami mako vise slobode kada deca pitaju sta neznaju
  У реду.
- Izuzetna organizacija i profesori.
- Na ZŠMM je bilo odlično, predavanje su bila dobro osmišljena,a još bolje sprovedena u dela, nemam nijednu zamerku.
- LjVNV. Hrana je bila predivna, smestaj udoban, nastavnici su lepo objašnjavali, buka je kada se legne uveče.
- Надам се да ћете следеће године унапредити организацију. Нисам свакодневно добијала информације о распореду, а неки родитељи јесу.
  Организавција је била сасвим ОК (то кажу оцене и изјаве). Можда је малих проблема било са информацијама, а њих је било и на огласним таблама.
  Ми смо информације свакога дана слали на све е-маил адресе које смо добили кроз пријавни упитник (неке адресе су биле погрешно попуњене). Неки мејлови су се враћали, али нисмо знали на које адресе да их поново пошаљемо. У сваком случају ћемо се потрудити да овај проблем превазиђемо.
- Da se svake godine organizuje!
- Све похвале!
- Надамо се да се дружимо и следеће зиме
- Sve je bilo super. Ocemo opet u Cacku.
- Sve pohvale
- Zadovoljni
- За сваку похвалу је организовање зимске школе. Постојао је само проблем за децу из наше општине који су из околних места. Због великих пауза између разних активности морали су долазити и одлазити из града неколико пута у току дана,или пропустити неке од њих. Идеално би било када би свима био омогућен смештај,али су вероватно били проблем смештајни капацитети. У сваком случају пуно корисних предавања,активности и нових познанстава. Велико хвала и свако добро!
  Следеће године ћемо понудити комплетан аранжман и деци оиз Чачка. Не верујем да ће се много родитеља определити за ту варијанту. У програму можемо делиично смањити број долазака у дом, али нешто мора остати и за вечерње часове. Мислимо да су турнири ипак најбезболнија варијанта.
- sve pohvale

- Iskreno se radujem ponovnom druzenju.
- Немам сугестије.
- Prezadovoljan sam ovom ZIMSKOM ŠKOLOM i voleo bih da učestvujem ponovo! Hvala na divnoj organizaciji!!!
- Sve pohvale, veoma smo zadovoljni! Iskoristili bi priliku da se zahvalimo na velikom trudu predavaca i ostalih ucesnika! Srdacan pozdrav!
- Све је било одлично.
- Sve pohvale za ZSMM i hvala na lepom druzenju,setnjama igrama kao sah,stoni tenis itd.Nadamo se druzenju i sledece zime i molimo da nam javite ako bude opet u Cacku.Veliki pozdrav od Matije Cakarevica.
- Sve pohvale, sve sto treba obuhvatili ste
- Одлично.
- Ako bi ucenici bili u mogucnosti da ocene nastavnike to bi bile najvise moguce ocene.Hvala sto ste uspeli da za tako kratko vreme ucenicima prenesete znanje.
- Sve je odlično, nemam nikakve primedbe.
- Jedini problem/primedba je to što đaci iz Čačka nisu mogli da učestvuju u vannastavnim aktivnostima jer bi to značilo da moraju da dolaze više puta u školicu matematike.Za decu koja su platila smeštaj (iz drugih gradova) je bilo dosta bolje i interesantnije...
  Све што сте рекли је тачно, али морате и нас да схватите. Када би цео програм реализовали од 8 до 20, то би било пренапрегнуто (скоро немогуће), а ми не би знали шта до спавања са децом да радимо, јер програм смо правили да они буду упослени целог дана. А оставити деци да се самоорганизују од 20:00 – 23:00 би било права катастрофа.

ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.
МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО


ПРЕДЛОГ ЛИТЕРАТУРЕ
ЗА ДОДАТНИ РАД И
ПРИПРЕМУ ЗА
МАТЕМАТИЧКА
ТАКМИЧЕЊА

ПРЕДЛОГ ЛИТЕРАТУРЕ ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ[1] [2]

[1] {S} Група аутора: 1100 задатака са математичких такмичења [3]
Друштво математичара Србије, Београд, 2021. (свеска 54)

[2] {S} Војислав Андрић: Математика X = 1236: Збирка задатака за додатну наставу математике (свеска 57)
Друштво математичара Србије, Београд, 2021.

[3] {S} Разни материјали за младе математичаре
Математичко друштво „Архимедес“, Београд

[4] {S} Кенгур без граница – задаци и решења за ученике од 1 – 4 разреда
Друштво математичара Србије, Београд, 2016.

[5] {S} Кенгур без граница – задаци и решења за ученике од 5 – 8 разреда
Друштво математичара Србије, Београд, 2016.

[6] {3} Војислав Андрић: Математика 3 – приручник за додатну наставу математике у 3. разреду (свеска 37)
Друштво математичара Србије, Београд, 2014.

[7] {3} Владимир Стојановић: Плус 3 – приручник за додатну наставу математике у 3. разреду
„Математископ“, Београд

[8] {4} Војислав Андрић: Математика 4 – приручник за додатну наставу математике у 4. разреду
Агенција „Ваљевац“, Ваљево, 1999.

[9] {4} Ариф Золић: Збирка решених задатака за 4. разред основне школе (свеска 50)
Друштво математичара Србије, Београд, 2008.

[10] {4} Владимир Стојановић: Плус 4 – приручник за додатну наставу математике у 4. разреду
„Математископ“, Београд

[11] {5} Војислав Андрић: Математика 5 – приручник за додатну наставу математике у 5. разреду (свеска 40)
Друштво математичара Србије, Београд, 2010.

[12] {5} Група аутора: Математика за оне који могу и желе више за 5. разред
Завод за уџбенике, Београд, 2007.

[13] {5} Владимир Стојановић: Плус 5 – приручник за додатну наставу математике у 5. разреду
„Математископ“, Београд, 2006.

[1] Ово је само један од могућих избора литературе

[2] Бројеви {3}, {4}, {5} ... који се налазе на крају референци указују на разред на који се односе.
Ознака {S} је ознака за за референце које се односе на више разреда

[14] {6} Јожеф Варга, Вељко Ћировић: Припремни задаци за математичка такмичења ученика 6. разреда
Друштво математичара Србије, Београд, 2020. (свеска 60)

[15] {6} Љубомир Вуковић, Драган Ђорић: Припремни задаци за математичка такмичења ученика 6. разреда
Друштво математичара Србије, Београд, 2020. (свеска 41)

[16] {6} Група аутора: Математика за оне који могу и желе више за 6. разред
Завод за уџбенике, Београд, 2008.

[17] {6} Владимир Стојановић: Плус 6 – приручник за додатну наставу математике у 6. разреду
„Математископ“, Београд, 2006.

[18] {7} Војислав Андрић: Математика 7* – приручник за додатну наставу математике у 7. разреду (свеска 58)
Друштво математичара Србије, Београд, 2020.

[19] {7} Група аутора: Математика за оне који могу и желе више за 7. разред
Завод за уџбенике, Београд, 2009.

[20] {7} Владимир Стојановић: Плус 7 – приручник за додатну наставу математике у 7. разреду
„Математископ“, Београд

[21] {7} Група аутора: Збирка решених задатака за додатни рад у 7 разреду
Просвета, Нови Сад, 1997.

[22] {7-8} Иванка Томић: Неједнакости за ученике основних школа
Круг, Београд, 1999.

[23] {7-8} Иванка Томић: Неједнакости за ученике основних школа
Круг, Београд, 1999.

[24] {7-8} Ратко Тошић: Решени задаци за младе математичаре
Научна књига, Београд, 1990.

[25] {7-8} Љубомир Вуковић, Драган Ђорић: Припремни задаци за математичка такмичења ученика 7. и 8. разреда
Друштво математичара Србије, Београд, 2020. (свеска 41)

[26] {7-8} Драган Стевановић, Ђорђе Стевановић: Кенгур без граница – задаци и решења за ученике од 7 – 8 разреда
Друштво математичара Србије, Београд, 2016.

[27] {8} Група аутора: Математика за оне који могу и желе више за 8. разред
Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[28] {8} Владимир Стојановић: Плус 8 – приручник за додатну наставу математике у 8. разреду
„Математископ“, Београд

[29] {8} Група аутора: Збирка решених задатака за додатни рад у 8разреду
Просвета, Нови Сад, 1999

[30] {S} Војислав Андрић: Диофантове једначине – приручник за додатну наставу математике
Друштво математичара Србије, Београд, 2021. (свеска 61)