ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

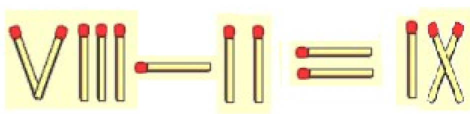
ВАЉЕВО, 04.12.2022.

3. РАЗРЕД

1. У броју 4817036 не мењајући редослед цифара, прецртај четири цифре тако да добијеш а) најмањи; б) највећи могући троцифрен број. Израчунај збир и разлику добијених бројева.

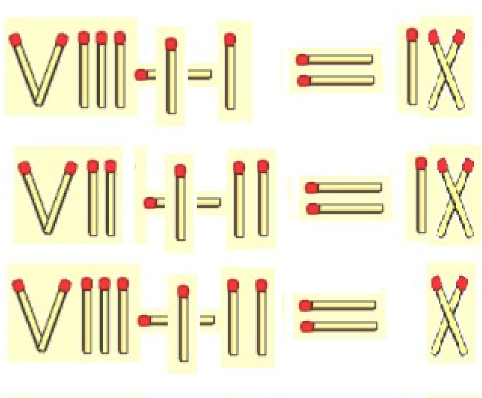
Решење: Најмањи троцифрени број направљен од датих цифара у датом поретку је 103, а највећи 876.
Њихов збир је 979, а разлика је 773.

2. Од палидрваца је састављена нетачна једнакост:



Премести само једно палидрвце тако да се добије тачна једнакост.
Одреди бар два решења датог проблема.

Решење: Претварањем „минуса“ у „плус“ добијају се три решења:



3. Користећи пет цифара 3, симболе рачунских операција и заграде напиши пет израза чије су вредности 1, 2, 3, 4 и 5.

Решење: Нека од могућих решења су:

$3 : 3 + (3 - 3) \cdot 3 = 1$

$(3 + 3) : 3 + 3 - 3 = 2$

$3 + 3 - 3 + 3 - 3 = 3$

$3 : 3 + 3 - 3 + 3 = 4$

$3 \cdot 3 - 3 - 3 : 3 = 5$

Напомињемо да су могући и други изрази који дају исте вредности.

4. Дат је низ природних бројева 98, 87, 76, 65 ... Одреди збир свих осталих бројева тог низа (тј. оних бројева који нису директно набројани).

Решење: Низ бројева чине двоцифрени бројеви у којима је прва цифра за 1 већа од прве.
Може и другачије, сваки члан низа је за 11 мањи од претходног.
Дакле, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10. Збир бројева који нису директно набројани је:
54 + 43 + 32 + 21 + 10 = 97 + 53 + 10 = 160

5. Колико има парних троцифрених бројева чији је збир цифара једнак 22?

Решење: Да би троцифрен број био паран он мора имати облик * * * = * * П, где је последња цифра парна. Дакле у обзир долазе бројеви; * * 0, * * 2, * * 4, * * 6 и * * 8.
Добијамо да је тада збир прве две цифре једнак 22, 20, 18, 16 и 14.
Прве две комбинације отпадају, јер највећи могући збир две цифре је 9 + 9 =18, па у обзир долазе само бројеви чији је збир прве две цифре једнак 18, 16 или 14.
То су бројеви: 994; 796, 886, 976; 598, 688, 778, 868, 958.
Таквих бројева је укупно 9.

4. РАЗРЕД

1. Користећи пет цифара 3, симболе рачунских операција и заграде напиши пет израза чије су вредности редом 6, 7, 8, 9 и 10.

Решење: Нека од могућих решења су:

$3 + 3 + (3 - 3) \cdot 3 = 6$

$3 \cdot 3 - (3 + 3) : 3 = 7$

$(3 + 3) : 3 + 3 + 3 = 8$

$3 \cdot 3 + (3 - 3) : 3 = 9$

$3 + 3 + 3 + 3 : 3 = 10$

Напомињемо да су могући и други изрази који дају исте вредности.

2. Марко је у школу пошао у 7 часова и 38 минута, а из школе се вратио у 12 часова и 23 минута. Јанко је у школу отишао у 13 часова и 42 минута, а из школе се вратио у 18 часова и 18 минута. Ко је више времена провео у школи и на путу: Марко или Јанко?

Решење: Марко је у школи и у путу провео 12 часова и 23 минута минус 7 часова и 38 минута, а то је 11 часова и 83 минута минус 7 часова и 38 минута што износи $11 - 7 = 4$ часа и $83 - 38 = 45$ минута.
Јанко је у школи и у путу провео 18 часова и 18 минута минус 13 часова и 42 минута, а то је 17 часова и 78 минута минус 13 часова и 42 минута, шту у коначном значи $17 - 13 = 4$ часа и $78 - 42 = 36$ минута.
Дакле више времена у школи и у путу је провео Марко.

3. Да ли је више парних или непарних четвороцифрених бројева чији је производ цифара једнак 8?

Решење: Како је број $8 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ то су сви четвороцифрени бројеви чији је производ цифара 8:
1124, 1142, 1214, 1241, 1412, 1421; 2114, 2141, 2411, 4112, 4121, 4211 – укупно 12.
1118, 1181, 1811, 8111 – укупно 4 и
1222, 2122, 2212, 2221 – укупно 4.
Парних има 10 (1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112, 1118, 1222, 2122 и 2212),
а непарних 10 (1241, 1421, 2141, 2411, 4121, 4211, 1181, 1811, 8111 и 2221).
Према томе једнако је непарних четвороцифрених бројева који имају производ цифара 8 и парних четвороцифрених бројева чији је производ цифара 8.

4. У базену чија је дужина 50 m, а ширина 30 m постављено је игралиште за ватерполо које је обележено линијама од плуте. Колики је обим ватерполо игралишта, ако је свака страница игралишта за ватерполо од ивица базена удаљена 3 m?

Решење: Димензије ватерполо игралишта су $50 - 3 - 3 = 44$ m и $30 - 3 - 3 = 24$ m.
Обим ватерполо игралишта је $44 + 24 + 44 + 24 = 68 + 68 = 136$ m.

5. Милан и Драган заједно имају 195 кликера. Колико кликера има сваки од њих, ако је половина Милановых кликера једнака трећини Драганових кликера?

Решење: Нека Миланова половина кликера износи x кликера. Тада је и Драганова трећина кликера, такође x. То значи да Милан има $2 \cdot x$, а Драган $3 \cdot x$ кликера, Следи да је
$2 \cdot x + 3 \cdot x = 95$. Дакле $5 \cdot x = 95$, па је $x = 95 : 5 = 19$ кликера.
Милан има $2 \cdot x = 2 \cdot 19 = 38$ кликера, а Драган има $3 \cdot x = 3 \cdot 19 = 57$ кликера.

5. РАЗРЕД

1. Запремина коцке је 512 cm^3. Колика је њена површина?

Решење: Нека је ивица коцке x. Запремина коцке је $x \cdot x \cdot x = 512$.
Растављањем броја 512 на чиниоце добија се да је $512 = 2 \cdot 256 = 2 \cdot 2 \cdot 128 =$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 64 = 8 \cdot 8 \cdot 8$, па је дужина ивице коцке једнака 8 cm.
Површина коцке је $P = 6 \cdot x \cdot x = 6 \cdot 8 \cdot 8 = 6 \cdot 64 = 384$ cm^2.

2. Алекса има 36 динара више од Лазе и 70 динара мање од Воје.
   Колико новца има свако од њих, ако је трећина Војине суме једнака половини Лазине суме?

Решење: Нека је половина Лазине суме и трећина Војине суме једака x.
Тада Воја има $3 \cdot x$, а Лаза $2 \cdot x$ динара. Како Воја има $70 + 36 = 106$ динара више од Лазе, то је $3 \cdot x - 2 \cdot x = x = 106$ динара. Воја има $3 \cdot x = 3 \cdot 106 = 318$ динара, Лаза $2 \cdot x = 212$ динара, а Алекса има $212 + 36 = 248$ динара.

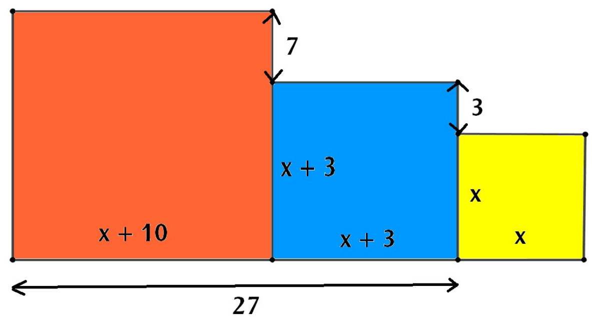
3. Дешифруј множење: $2 * \cdot 105 = 2 * 1 *$.

Решење; Нека је $2a \cdot 105 = 2b*c$. Број 2b1c је дељив са $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, што значи да је дељив са 3, 5 и 7.
Како је дељив са 5, то је последња цифра c једнака 0 или 5, па се ради о бројевима 2b10 или , 2b15. Како ти бројеви морају бити дељиви са 3, то је $2 + b + 1 + 0 = 8 + 3$ дељиво са 3, или је $2 + b + 1 + 5 = 8 + b$ дељиво са 3.
Дакле, у обзир долазе само бројеви 2010, 2310, 2610, 2910 и 2115, 2415, 2715.
Дељењем са 7 добија се да је $2310 : 105 = 22$ и $2415 : 105 = 23$, па је тражено множење
$22 \cdot 105 = 2310$ или $23 \cdot 105 = 2415$.

4. Дати су скупови: A = { x | x је сложен број мањи од 20 };
   B = { y | y је прост број мањи од 21 };
   C = { z | z је природан број дељив са 3 }.
   Одреду скупове: а) $(A \cup B) \cap C$; б) $(A / C) \cap B$.

Решење: Тражени скупови су: A = { 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18};
B = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} и C = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 ...}.
а) Скуп $(A \cup B) \cap C$ = { 3, 6, 9, 12, 15, 18};
б) Скуп $(A / C) \cap B$ = { 4, 8, 10, 14, 16 } $\cap$ { 3, 6, 9, 12, 15, 18 } = $\varnothing$.

5. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.



Решење: Нека је страница најмањег (жутог) квадрата једнака x.
Тада је страница плавог квадрата једнака x + 3, а страница црвеног квадрата је x + 3 + 7 = x + 10. Следи да је x + 3 + x + 10 = 27, па је 2x + 13 = 27. Значи да је 2x = 14 и x = 7.
Странице датих квадрата су 7, 10 и 17.
Обим дате фигуре је 7 + 10 + 17 + 17 + 17 + 7 + 10 + 3 + 7 + 7 = 102, а површина је 7 · 7 + 10 · 10 + 17 · 17 = 49 + 100 + 289 = 438.

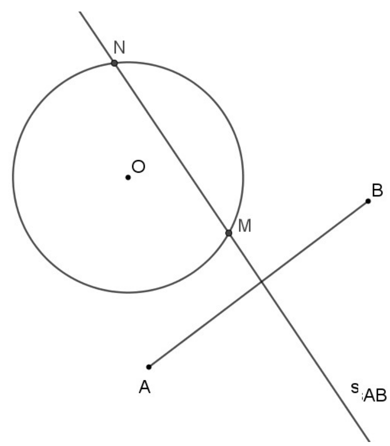
6. РАЗРЕД

1. Шта је веће: $\dfrac{337}{2022}$ или $\dfrac{6}{37}$?

Решење: $\dfrac{337}{2022} = \dfrac{337}{2 \cdot 3 \cdot 337} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{36} > \dfrac{6}{37}$.

2. Дата је кружница k чији је центар тачка O и чији је полупречник једнак 2 cm и дуж AB. Одредити све тачке на кружници k које су једнако удаљене од тачака A и B.

Решење: Нека је M тражена тачка. Како је M тачка која је једнако удаљена од тачака A и B она припада симетрали дужи AB. Међутим M припада и датој кружници k. То значи да је M пресек скупа тачака симетрале дужи s_{AB} и скупа тачака кружнице k.



У изабраном случају симетрала дужи AB и кружница k секу се у две тачке M и N.
Међутим, могућ је и случај када симетрала дужи AB додирује кружницу k и тада ће бити само једна пресечна (додирна) тачка, тј. само једна тачка која је једнако удаљена од A и B и припада кружници k.
Постоји и ситуација када симетрала дужи AB са кружницом k нема заједничких тачака, тј. када је пресек празан скуп и тада нема решења, тј. не постоји тачка која је једнако удаљена од тачака A и B и припада кружници k.

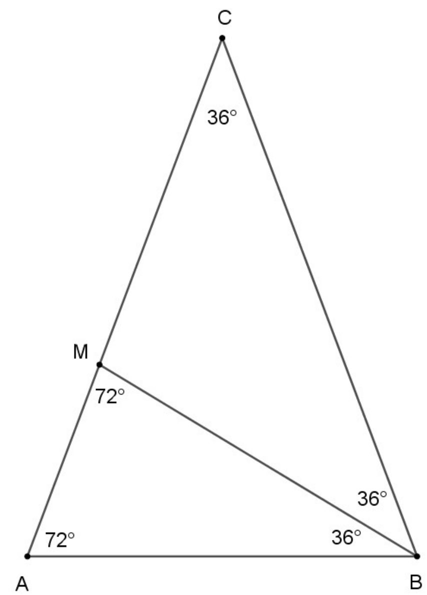
3. Колико најмање, а колико највише узастопних целих бројева треба:
а) сабрати; б) помножити, да би се добио број 120?

Решење: а) Како је тражени збир 120 и како су два узастопна цела броја различите парности, њихов збир не може бити 120. Дакле најмањи могући број сабирака је 3 и то су онда узастопни цели бројеви 39, 40 и 41.
Највише сабирака се добија ако је тражени збир (-119) + (- 118) + ... + 0 + ... 118 + 119 + 120.
Тада има 119 негативних, нула и 120 позитивних сабирака, што је укупно 240.

б) Како је 120 = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 = 10 · 12, то производ два узастопна броја не може бити 120.
Из множења 4 · 5 · 6 = 120 закључујемо да најмањи могући број чинилаца може бити 3.
Највише чинилаца је 5 и то у случају када је 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120, јер сваки нови чинилац (сем нуле) би само повећао апсолутну вредност производа.

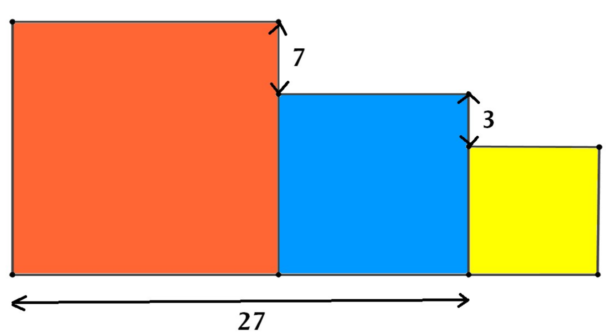
4. Дат је једнакокраки троугао ABC (AC = BC) у коме је $\angle ABC = 72^{o}$. Симетрала $\angle ABC$ сече страницу AC у тачки M. Доказати да су троуглови ABM и BCM једнакокраки.

Решење: Како је AC = BC и $\angle ABC = 72°$, то је и $\angle BAC = 72°$.
Тада је $\angle ACB = 180° - 72° - 72°$.
Како је BM симетрала $\angle ABC$, то је $\angle ABM = \angle AMB = 72° : 2 = 36°$.



Сада је у троуглу BCM, $\angle BCM = \angle CBM = 36°$ и троугао BCM је једнакокрак (BM = CM).
У троуглу ABM, $\angle ABM = 36°$ и $\angle BAM = 72°$, па је $\angle AMB = 180° - 36° - 72° = 72°$. Следи да је и троугао ABM једнакокрак (AB = MB).

5. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.



Решење: Нека је страница најмањег (жутог) квадрата једнака x.
Тада је страница цлавог квадрата једнака $x + 3$, а страница црвеног квадрата је $x + 3 + 7 = x + 10$. Следи да је $x + 3 + x + 10 = 27$, па је $2x + 13 = 27$. Значи да је $2x = 14$ и $x = 7$.
Странице датих квадрата су 7, $7 + 3 = 10$ и $10 + 7 = 17$.
Обим дате фигуре је $7 + 10 + 17 + 17 + 17 + 7 + 10 + 3 + 7 + 7 = 102$, а површина је $7 \cdot 7 + 10 \cdot 10 + 17 \cdot 17 = 49 + 100 + 289 = 438$.

7. РАЗРЕД

1. Три молера за 4 дана окрече 5 станова.
   а) Колико станова окречи 8 молера за 9 дана?
   б) Колико молера треба ангажовати да би за 6 дана окречили 25 станова?
   в) За колико дана 14 молера окречи 70 станова?

Решење: Ако 3 молера за 4 дана (12 дневниц) окрече 5 станова, то значи да за један дан један молер окречи 5/12 стана. Тада;

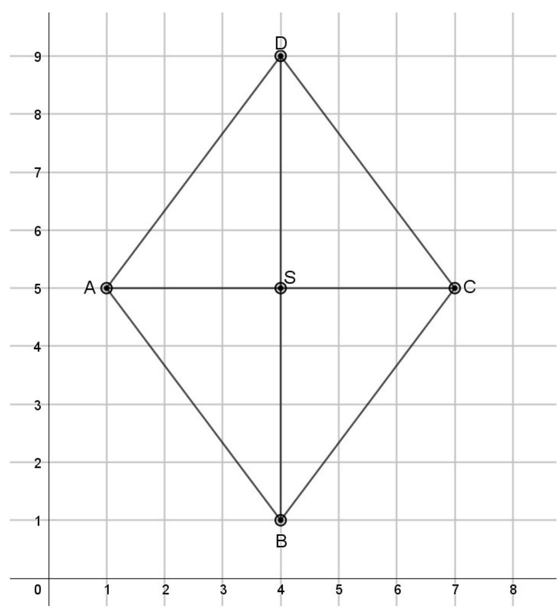
а) 8 молера за 9 дана, тј. 72 дневнице окрече $72 \cdot 5/12 = 6 \cdot 5 = 30$ станова.

б) Нека има x молера. Они за 6 дана окрече $6x \cdot 5/12 = 25$. То значи да је $x = 10$ молера.

в) Нека је број дана y. Тада је $14y \cdot 5/12 = 70$. Следи да је $y = 12$ дана.

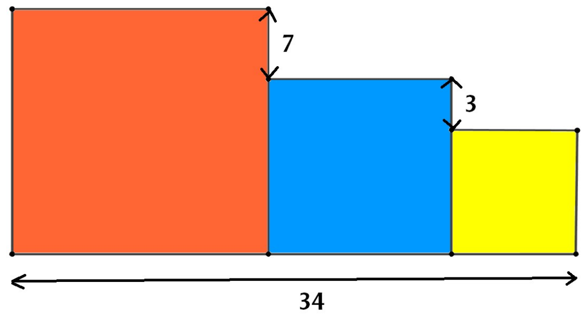
2. У координатној xOy равни дате су тачке A(1, 5), B(4, 1) и C(7, 5).
   а) Одреди координате тачке D, ако је четвороугао ABCD ромб.
   б) Колика је површина ромба ABCD?

Решење: а) Када се уцртају дате тачке A, B и C, онда је јасно да тачка S која представља средиште (пресек дијагонала ромба) има координате (4, 5). Како се дијагонале ромба полове, то је BS = DS = 4, па тачка D има координате (4, 5 + 4 = 9) = (4, 9).



б) Дијагонале ромба су AC = 6 и BD = 8. Како су дијагонале ромба нормалне то је његова споврршиа $6 \cdot 8 : 2 = 48 : 2 = 24$.

3. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.



Решење: Нека је страница најмањег (жутог) квадрата једнака x.
Тада је страница црвеног квадрата једнака x + 3, а страница црвеног квадрата је
x + 3 + 7 = x + 10. Следи да је x + x + 3 + x + 10 = 34, па је 3x + 13 = 34. Значи да је
3x = 34 – 13 = 21, па је x = 7.
Странице датих квадрата су 7, 7 + 3 = 10 и 10 + 7 = 17.
Обим дате фигуре је 7 + 10 + 17 + 17 + 17 + 7 + 10 + 3 + 7 + 7 = 102, а површина
је $7 \cdot 7 + 10 \cdot 10 + 17 \cdot 17 = 49 + 100 + 289 = 438$.

4. Дат је природан број n ($1000 < n < 2022$). Колико има природних бројева n таквих да је и $\sqrt{n}$ природан број?

Решење: Како је $1000 < n < 2022$, то је $\sqrt{1000} < \sqrt{n} < \sqrt{2022}$.
Из $31^2 = 961$ и $45^2 = 2025$ следи да је $31 = \sqrt{961} < \sqrt{1000} < \sqrt{n} < \sqrt{2022} < \sqrt{2025} = 45$.
Тражених природних бројева је 44 – 31 = 13.

5. Дат је скуп {1, 2, 3, ... , 14, 15, 16}. Елементе датог скупа поређај у низ тако да је збир свака два суседна броја у низу потпун квадрат. Низ садржи 16 бројева и сваки број из датог скупа се у низу појављује тачно једном.

Решење: Најмањи могући збир два броја датог скупа је 1 + 2 = 3, а највећи могући је
15 + 16 = 31. То значи да се као потенцијални збирови два суседна броја могу појавити само
$2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ и $5^2 = 25$. Како је 8 + x потпун квадрат само ако је x = 1 и 16 + y потпун квадрат само ако је x = 9, то су беојеви 8 и 16 први и последњи у низу (или обрнуто).
Тада је тражени низ: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, ...
Сада постоје две могућности да се низ настави 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 1, 15, 10, 6, 8, што није решење, јер 6 + 8 = 14 и није потпун квадрат или
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 што јесте решење.

Решење је и ако се крене са супротне стране, тј. од броја 8, само што је тада јединствен поступак: 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16.

8. РАЗРЕД

1. Висина правоуглог троугла дели хипотенузу на делове који су једнаки 9 cm и 16cm. Колика је површина круга уписаног у дати троугао?

Решење: Како хипотенузина висина дели хипотенузу на делове од 9 cm и 16 cm, то је хипотенуза правоуглог троугла једнака 9 + 16 = 25 cm, а хипотенузина висина h једнака геометријској средини делова, тј. h = $\sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$ cm.

Тада су катете једнаке $\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm, односно $\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$ cm.

Пвршина правоуглог троугла је P = 15 · 20 : 2 = 150 cm^2, његов обим O = 15 + 20 + 9 + 16 = 60 cm.

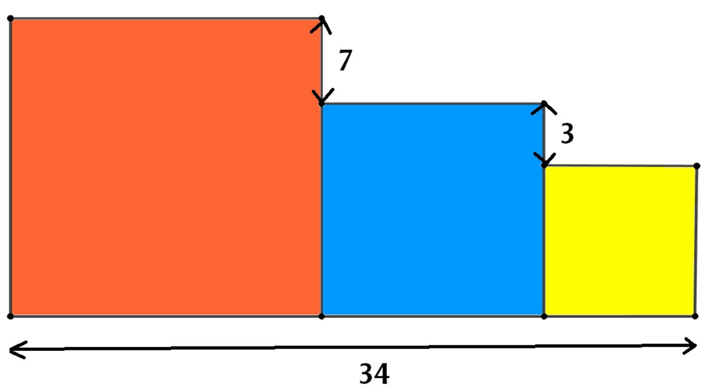
Полупречник уписаног круга је једнак количнику површине и полуобима, тј. 150/30 = 5 cm.

Површина круга уписаног у троугао је $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2.

2. Дуж AB има дужину 5 cm. Тачка A је од равни удаљена π 9 cm, а тачка B 6 cm. Одреди дужину нормалне пројекције дужи AB на раван π, ако су тачке A и B са исте стране равни π.

Решење: Како је разлика растојања тачака A и B од равни π 3 cm, а дужина дужи AB једнака 5 cm , то из Питагорине теореме следи да је A'B' = $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ cm.

3. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.

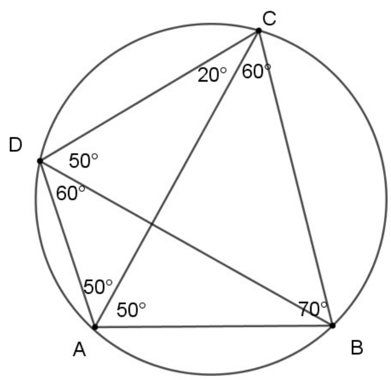


Решење: Нека је страница најмањег (жутог) квадрата једнака x.

Тада је страница црвеног квадрата једнака x + 3, а страница црвеног квадрата је x + 3 + 7 = x + 10. Следи да је x + x + 3 + x + 10 = 34, па је 3x + 13 = 34. Значи да је 3x = 34 – 13 = 21, па је x = 7.

Странице датих квадрата су 7, 7 + 3 = 10 и 10 + 7 = 17.
Обим дате фигуре је 7 + 10 + 17 + 17 + 17 + 7 + 10 + 3 + 7 + 7 = 102, а површина је $7 \cdot 7 + 10 \cdot 10 + 17 \cdot 17 = 49 + 100 + 289 = 438$.

4. Сва темена четвороугла ABCD припадају кружници k. Познати су углови: $\angle ADC = 110^{\circ}$, $\angle BCD = 80^{\circ}$ и $\angle ADB = 60^{\circ}$. Одреди углове троуглова ABC и ACD.



Решење: Четвороугао ABCD је тетивни, јер му сва темена припадају кружници.
Како је четворугао ABCD тетивни то је збир наспрамних углова 180°, па је $\angle CDA = 110°$ и $\angle BAD = 100°$.
Углови $\angle ADB$ и $\angle ACB$ периферијски углови над истом тетивом, то су они једнаки па је $\angle ACB = 60°$. Тада
Сада је јасно да су углови троугла ABC редом; $\angle ABC = 70°$, $\angle ACB = 60°$ и $\angle BAC = 50°$.
Углови троугла ACD су; $\angle ADC = 110°$; $\angle DAC = 100° - \angle CAB = 100° - 50° = 50°$ и $\angle ACD = 20°$

5. Одреди све реалне бројеве x такве да је $|x-1| + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$.

Дата једначина је еквивалентна са једначном $|x-1| + \sqrt{(x+2)^2} = |x-1| + |x+2| = 5$.
Једначину посматрамо у три области: (1) $x < -2$: (2) $-2 \le x$ 1 и (3) $1 \le x$.
У области (1) се добија једначина $1 - x - x - 2 = 5$, тј. $2x = -6$ и решење $x = -3$ припада посматраној области.
У области (2) се добија да је $1 - x + x + 2 = 5$, тј. $3 = 5$ и једначина нема решења.
У области (3) једначина гласи $x - 1 + x + 2 = 5$, тј. $2x = 4$ и решење $x = 2$, припада тој области.
Према томе скуп решења дате једначине је $\{-3, 2\}$.