ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ - ШКОЛСКА 2022/23

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ

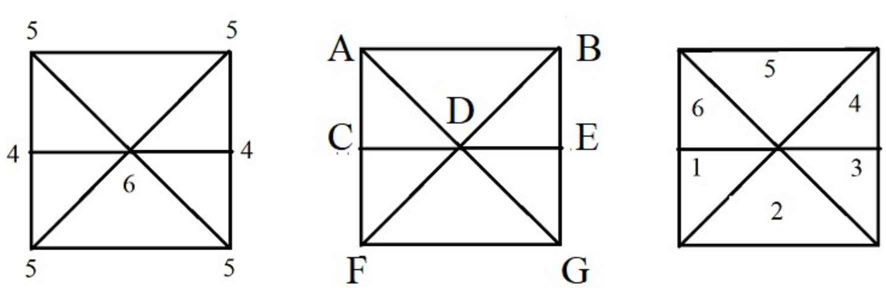
РЕШЕЊА

3. РАЗРЕД

1. Анка и Бранка су 2016. године заједно имале 59 година. Колико година ће Анка и Бранка заједно имати 2033. године?

Како од 2016 до 2023 има 2033 – 2016 = 17 година, то ће и Анка и Бранка бити старије за по 17 година, што је укупно 17 + 17 = 34. Дакле, 2033. године Анка и Бранка ће заједно имати 59 + 34 = 93 године.

2. Колико дужи, а колико троуглова се може уочити на следећој слици слици?



На слици лево је у свакој тачки написан број дужи које полазе из те тачке. Како је свака дуж рачуната два пута, укупан број дужи је (5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 6) : 2 = 34 : 2 = 17.

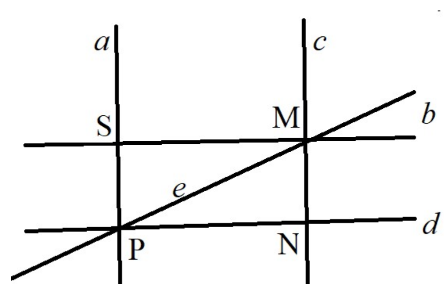
Или све могуће дужи су: AB, AC, AD, AF, AG, BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, DE, DF, DG, EG, и FG. Има их тачно 17.

Тражени троуглови су: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 34, 234, 345, 561, 612 и има их 12.

3. У једнакости $*** \cdot * - ** : * = 4$ уместо звездица напиши одговарајуће цифре тако да се добије тачна једнакост. Одреди бар два решења.

Призвод $*** \cdot *$ је најмање 100. Како је количник $** : *$ двоцифрен или једноцифрен број, то је $*** \cdot *$ једнако 99 + 4, 98 + 4, 97 + 4 и 96 + 4, па је $*** \cdot *$ једнако 103, 102, 101 или 100. Могућа решења су: $100 \cdot 1 - 96 : 1 = 4$; $101 \cdot 1 - 97 : 1 = 4$; $102 \cdot 1 - 98 : 1 = 4$ и $103 \cdot 1 - 99 : 1 = 4$.

4. Нацртај слику на којој ће праве *a, b, c, d* и *e* и тачке M, N, P и S испунити следеће услове:
   * праве *a* и *c* су паралелне;
   * праве *c* и *d* су нормалне;
   * праве *b* и *d* су паралелне;
   * праве *b, c* и *e* секу се у тачки M;
   * праве *c* и *d* секу се у тачки N;
   * праве *a, d* и *e* секу се у тачки P;
   * праве *a* и *b* секу се у тачки S.

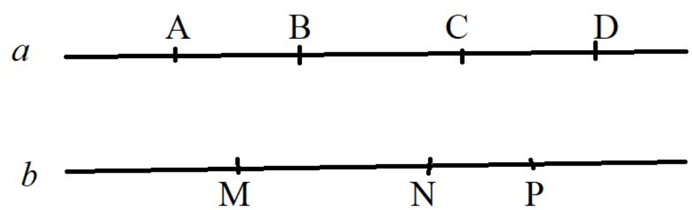


5. Израчунај вредност израза (1 + 3 + 5 + ... + 75 + 77) – (2 + 4 + 6 + ... + 74 + 76).

(1 + 3 + 5 + ... + 75 + 77) – (2 + 4 + 6 + ... + 74 + 76) =
(77 – 76) + (75 – 74) + ... + (5 – 4) + (3 – 2) + 1 =
1 + 1 + ... + 1 + 1 = 38 + 1 = 39.

4. РАЗРЕД

1. На правој a дате су 4 тачке, а на правој b 3 тачке. Нацртај одговарајућу слику и одреди колико правих, а колико дужи је одређено датим правама и датим тачкама?



Правих има 14: *a, b* и праве одређене талкама AM, AN, AP, BM, BN, BP, CM, CN, CP, DM, DN, DP.

Дужи има 21: 6 на правој *a,* 3 на правој *b* и 12 када се искомбинују дате тачке (AM, AN, AP, BM, BN, BP, CM, CN, CP, DM, DN, DP).

2. Јанко и Марко имају картон и маказе. Јанко има картонски квадрат странице 6 cm, а Марко квадрат чија је страница 8 cm. И Марко и Јанко су своје квадрате исекли на квадратне центиметре (квадрате странице један центиметар), а онда су заједно од свих добијених квадратних центиметара саставили нови квадрат. Колики су обим и површина добијеног квадрата?

Површина Јанковог квадрата је $6 \cdot 6 = 36\ cm^2$, а површина Марковог квадрата је $8 \cdot 8 = 64\ cm^2$. Кад исеку своје квадрате на квадратне центиметре, онда они заједно имају $36 + 64 = 100\ cm^2$ и могу саставити квадрат чија је страница 10 cm. Обим тог квадрата је 40 cm, а површина $100\ cm^2$.

3. На левој (непарној) страни улице има 77, а на десној (парној) страни улице има 88 кућа. Колико цифара је потребно за нумерацију кућа у тој улици?

На левој (непарној страни улице има 5 кућа које се нумеришу једноцифреним непарним бројевима, још 45 кућа које се нумеришу двоцифреним бројевима и $77 - 50 = 27$ кућа које се нумеришу троцифреним бројевима. За ту нумерацију је потребно $5 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 27 \cdot 3 = 5 + 90 + 81 = 176$ цифара.

На десној (парној страни улице има 4 кућа које се нумеришу једноцифреним бројевима, још 45 кућа које се нумеришу двоцифреним бројевима и $88 - 49 = 39$ кућа које се нумеришу троцифреним бројевима. За ту нумерацију је потребно $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 39 \cdot 3 = 4 + 90 + 117 = 211$ цифара.
То значи да је за нумерацију кућа у тој улици неопходно $176 + 211 = 387$ цифара.

4. Дешифруј сабирање AAAA + BBB + CCC + BD = 2023, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговајају различите цифре.

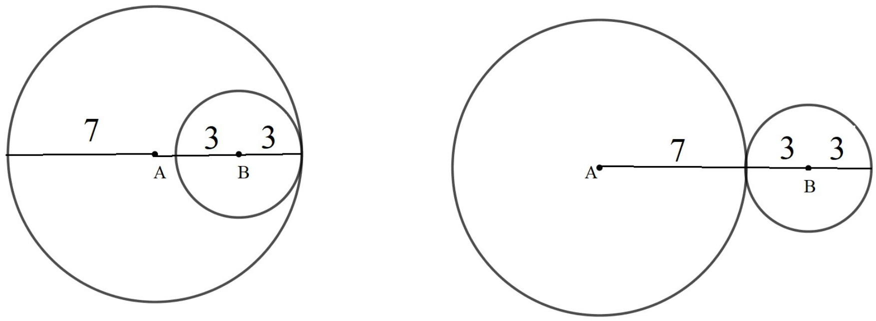
Број A не може бити 2, јер би тада први сабирак био 2222.
Дакле A = 1, па се сабирање своди на 1111 + BBB + CCC + BD = 2023, тј.
BBB + CCC + BD = 2023 – 1111 = 912.
Јасно је да је B + C = 8 и да је B + C + D = 12, па је 8 + D = 12, тј. D = 4
Сада је BBB + CCC + B0 = 912 – 4 = 908 = 888 + B0, што значи да је B0 = 908 – 888 = 20. Тада је B = 2 и C = 6, па је тражено сабирање 1111 + 222 + 666 + 24 = 2023.

5. Колико најмање, а колико највише једнаких троцифрених бројева треба сабрати да би добијени збир био 2023?

Број 2023 једнак је $7 \cdot 17 \cdot 17 = 7 \cdot 289 = 17 \cdot 119$, што значи да је:
2023 = 289 + 289 + --- + 289 (7 сабирака) или
2023 = 119 + 119 + ... + 119 (17 сабирака).
Закључак је да је неопходно најмање 7, а највише 17 једнаких троцифрених сабирака.

5. РАЗРЕД

1. Круг k_1 чији је центар тачка A има полупречник 7 cm, а круг k_2 чији је центар тачка B има полупречник 3 cm. Колика је растојање AB, ако се кругови k_1 и k_2 додирују:
а) са унутрашње стране; б) са спољашње стране?

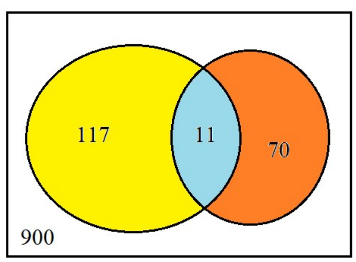


а) Са слике се закључује да је у случају унутрашњег додира кружница AB = 7 – 3 = 4 cm.

б) Слично, у случају спољашњег додира кружница, AB = 7 + 3 = 10 cm.

2. Колико има троцифрених природних бројева који нису дељиви ни са 7, ни са 11?

Троцифрених бројева има 900.
Троцифрених бројева дељивих са 7 има 128, јер је 900 : 7 = 128 (4).
Троцифрених бројева дељивих са 11 има 81, јер је 900 : 11 = 81 (1).
Троцифрених бројева који су дељиви и са 7 и са 11, тј. са 77 има 11, јер је 900 : 77 = 11(53).
Ако добијене податке унесемо у Венов дијаграм добија се;



Троцифрених бројева који нису дељиви ни са 7 ни са 11 има 900 – 128 – 70 = 702.

3. На правој p дате су редом тачке A, S и B. Тачка A се централном симетријом у односу на центар симетрије S, пресликава у тачку A_1, а тачка B у тачку B_1. Одреди дужину дужи BB_1, ако је AA_1 = 20 cm и AB_1 = 6 cm.

A B_1 S B A_1

--------------o------------------o------------o------------o-----------------o----------------------- p

o---------------------------- 20 cm --------------------------o

o----- 6 cm -----o

Тачке A и A_1 су централно симетричне у односу на тачку S, па је AS = SA_1 = 10 cm.
Како је AB_1 = 6 cm, то је B_1S = 10 – 6 = 4 cm. Тада је $BB_1 = 2 \cdot B_1S = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

Постоји и друго решење:

```
     B1                  A                           S                            A1                     B
-----o-------------------o--------------------------o----------------------------o----------------------o------ p
                         o------------------------ 20 cm -----------------------o
     o------ 6 cm -----o
```

Тачке A и A_1 су централно симетричне у односу на тачку S, па је $AS = SA_1 = 10$ cm.
Како је $AB_1 = 6$ cm, то је $B_1S = 10 + 6 = 16$ cm. Тада је $BB_1 = 2 \cdot B_1S = 2 \cdot 16 = 32$ cm.

4. Шта је веће: $\frac{17}{2023}$ или $\frac{11}{1320}$?

Како је $2023 = 17 \cdot 119$ и $1320 = 11 \cdot 120$ то после скраћивања са 17, први разломак постаје $\frac{17}{2023} = \frac{17}{17 \cdot 119} = \frac{1}{119}$.

Слично, после скраћивања са 11, други разломак постаје $\frac{11}{1320} = \frac{11}{11 \cdot 120} = \frac{1}{120}$.

Како је $\frac{1}{119} > \frac{1}{120}$ то је и $\frac{17}{2023} > \frac{11}{1320}$.

5. Колико најмање и колико највише сложених бројева треба сабрати да би добијени збир био 2023?

Најмање два. На пример $8 + 2015 = 9 + 2014 = 2023$.

Највише сабирака ће бити ако су сабирци што мањи. Најмањи сложен број је 4, па је најбоље да највише сабирак буде једнако 4.
Ако има 505 четворки, онда је 506. сабирак $2023 – 2020 = 3$, а он је прост број.
Ако има 504 четворке, онда је 505. сабирак $2023 – 2016 = 7$, а он је прост број.
Ако има 503 четворке, онда је 504. сабирак $2023 – 2012 =11$, а он је прост број.
Ако има 502 четворке, онда је 503. сабирак $2023 – 2008 = 15$, а то је сложен број.
Дакле највише може бити 503 сабирка.

6. РАЗРЕД

1. Може ли се скуп бројева S = { –2023, –2022, ... , –2, – 1, 0, 1, 2, 3, ... 2020, 2021, 2023 } поделити на два подскупа A и B, који немају заједничких елемената, тако да је $A \cup B = S$ и да је:
   а) збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B;
   б) производ елемената скупа A једнак производу елемената скупа B?

а) Нека је збир бројева у скупу A једнак x. Тада је и збир бројева у скупу B једнак x. То значи да је збир бројева у скупу S једнак $x + x = 2x$.
Како је збир бројева у скупу S једнак 2023 – 2023 – 2022 + 2021 – 2021 + ... + 1 – 1 + 0 = – 2022, то је $2x = -2022$ и $x = -1011$. То значи да постоје скупови A и B такви да је збир бројева у скупу A једнак збиру бројева у скупу B.
На пример: A = { –2022, 1011, 0} и B = { –1011, 2023, –2023, 2020, –2020, ... , 2, – 2, 1, – 1 }.
Јасно је да је и у скуп A и у скупу B збир боројева једнак – 1011. Могу се направити и друге тачне комбинације за скупове A и B.

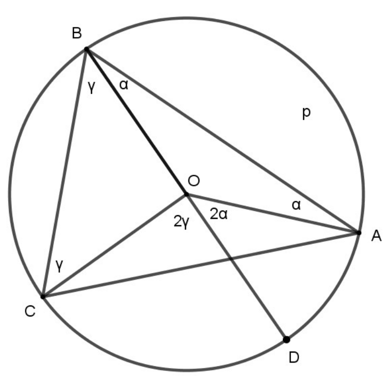
б) Није могуће, јер 0 ће припасти или скупу A или скупу B. Производ бројева у скупу где је 0 биће 0, а производ бројева у коме нема 0, биће различит од 0.

2. Базен за купање се пуни цевима A и B, а празни се помоћу цеви C. Цев A напуни базен за 4, цев B за 6 сати, а цев C испразни базен за 12 сати. За колико сати ће се напунити базен ако су у функцији све три цеви?

За један сат напуни се $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3 + 2 - 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ базена.

Дакле, базен се напуни за 3 сата.

3. На кружици k чији је центар тачка O, дате су редом тачке A, B и C тако да се тачка O налази у унутрашњој области троугла ABC. Докажи да је $\angle AOC = 2\angle ABC$.



Троуглови AOB и BOC су једнакокраки.
Нека је $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$. Тада је $\angle AOD$ као спољашњи угао троугла ABO једнак 2α.
Слично $\angle BCO = \angle CBO = \gamma$ и $\angle AOD = 2\gamma$ (као спољашњи угао троугла BCO.
Како је $\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = \alpha + \gamma$, то је $\angle AOC = \angle AOD + \angle COD = 2\alpha + 2\gamma = 2\angle ABC$.

4. Реши једначину: $1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{|\,x\,|}} = 2023$.

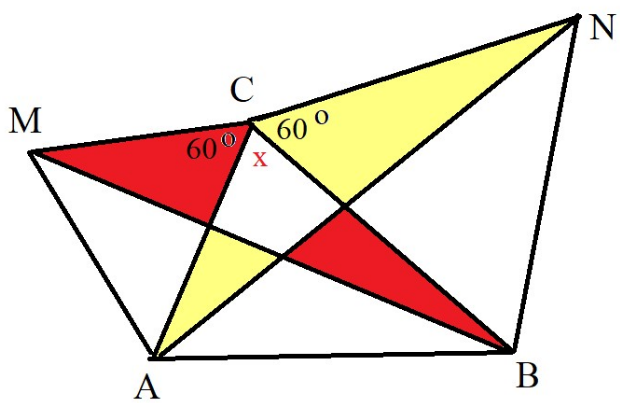
Из $1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{|\,x\,|}} = 2023$ следи да је $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{|\,x\,|}} = 2023 - 1 = 2022.$

Ако су два разломка једнака онда су једнаке и њихове реципрочне вредности, па је

$1 - \dfrac{1}{|\,x\,|} = \dfrac{1}{2022}$. Тада је $\dfrac{1}{|\,x\,|} = 1 - \dfrac{1}{2022} = \dfrac{2021}{2022}$ и добија се да је

$|\,x\,| = \dfrac{2022}{2021}$. То значи да једначина има два решења $\dfrac{2022}{2021}$ и $-\dfrac{2022}{2021}$.

5. Дат је троугао ABC. Над његовим страницама AC и BC са спољне стране су конструисани једнакостранични троуглови ACM и BCN. Докажи да је AN = BM.



Нека је $\angle ACB = x$

Из услова задатка је AC = CM = MA и BC = CN = NB.

Троуглови ACN и BCM су подударни, јер је:

1) AC = CM;

2) $\angle ACN = x + 60^o = \angle BCM$;

3) CN = BC.

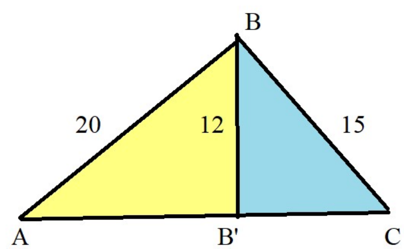
Из подударности троуглова следи да је AN = BM.

7. РАЗРЕД

1. Ако је n природан број, одреди збир свих решења неједначине $2 \leq \sqrt{n - 2023} \leq 3$.

Квадрирањем дате неједначине добија се да је $2^2 = 4 \leq n - 2023 \leq 9 = 3^2$.
Следи да је $4 + 2023 \leq n \leq 9 + 2023$, па је $2027 \leq n \leq 2032$.
Збир свих целобројних решења неједначине је $2027 + 2028 + 2029 + 2030 + 2031 + 2032 = 3 \cdot 4059 = 12177$.

2. У троуглу ABC, дате су странице AB, BC као и висина BB' из темена B, тако да је AB = 20 cm, BC = 15 cm и BB' = 12 cm. Одреди угао $\angle ABC$.

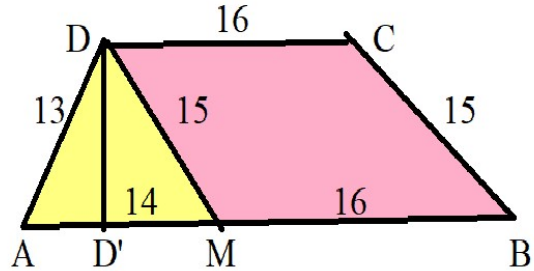


На основу Питагорине теореме је $(AB')^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$, па је AB' = 16 cm.
Слично је и $(CB')^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$, па је CB' = 9 cm.
Тада је AC = AB' + B'C = 16 + 9 = 25 cm.
Како је $AB^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 = AC^2$, то је на основу обрнуте Питагорине теореме троугао ABC правоугли и $\angle ABC = 90°$.

3. Шта је веће: 2^{2023} или 3^{1349}?

Из низа једнакости и неједнакости
$2^{2023} = 2 \cdot 2^{2022} = 2(2^3)^{674} = 2 \cdot 8^{674} < 3 \cdot 9^{674} = 3 \cdot (3^2)^{674} = 3 \cdot 3^{1348} = 3^{1349}$
следи да је $2^{2023} < 3^{1349}$.

4. Одреди површину трапеза чије основице су 30 cm и 16 cm, а краци 13 cm и 15 cm.



Ако се конструише дуж DM која је паралелна са BC, онда је четвороугао BCDM паралелограм и BM = CD = 16 cm. Тада је AM = AB – MB = 30 – 16 = 14 cm.

Ако се на троугао ADM, чије су странице 13, 14 и 15 примени Херонова формиула, добија се да је површина троугла ADM = 84 cm^2. Из површине се добија да је AM · DD' : 2 = 84, па је DD' = 2 · 84 : 14 = 12 cm.

Површина трапеза P = (30 + 16) · 12 : 2 = 46 · 6 = 276 cm^2.

5. Скуп A садржи 2023 произвољна и различита природна броја. Докажи да међу елементима скупа A постоји бар 338 бројева чија је разлика дељива са 6.

Остаци при дељењу природног броја са 6 су 0, 1, 2, 3, 4 и 5.
Број 2023 : 6 = 337(1), тј. 2023 при дељењу са 6 даје количник 337 и остатак је 1.
Када се посматрају дата 2023 природна броја, онда на основу Дирихлеовог принципа постоји једна класа са бар 337 + 1 = 338 бројева који имају једнаке остатке (на пример y) при дељењу са 6, Сви бројеви у датој класи имају облик $6x + y$. За свака два од њих. важи да је њихова разлика $6x_1 + y - (6x_2 + y) = 6x_1 + y - 6x_2 - y = 6(x_1 - x_2)$ дељива са 6.

8. РАЗРЕД

1. Од квадра од пластелина чије су ивице 6 cm, 9 cm и 16 cm направљене су (без остатка материјала) четири једнаке коцке. Колико најмање квадратних центиметара картона треба да би се те коцке спаковале у четири картонске кутије са поклопцем?

Запремина квадра је $6 \cdot 9 \cdot 16 = 54 \cdot 16 = 864$ cm^3.
Како је $864 : 4 = 216$ cm^3 и као је $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, то је страница једне од коцки једнака $2 \cdot 3 = 6$ cm.
Површина једне коцке је $6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216$ cm^2.
За 4 кутије мод картона требаће најмање $216 \cdot 4 = 864$ cm^2 картона.

2. Колико целобројних решења има неједначина $x + |x - 3| \leq 2023$?

Разликују се два случаја:
1) Ако је $x - 3 < 0$, онда је $x < 3$ и неједначина има облик $x + 3 - x \leq 2023$, па је $3 \leq 2023$ и решење неједначине су сви цели бројеви мањи од 3.

2) Ако је $x \geq 3$ неједначина има облик $x + x - 3 \leq 2023$, па је $2x \leq 2026$ и $x \leq 1013$.

Дакле, решења неједначине су сви цели бројеви мањи или једнаки 1013.
Њих има бесконачно много, па неједначина има бесконачно много целобројних решења.

3. Коцка чија је ивица 13 cm исечена је на мање коцке чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm. Колико има коцки чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm?

Запремина коцке је $13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197$ cm^3.

Нека има x коцки чија је запремина 1 cm^3, y коцки чија је запремина 8 cm^3 и z коцки чија је запремина 27 cm^3. Тада је $x + 8y + 27z = 2197$ и у скупу природних бројева ова једначина има коначно, али много решења, јер $27z \leq 2197$ и $8y \leq 2197$, па је $y \leq 274$ и $z \leq 81$.
За свако z постоје разне вредности x и y које задовољавају једнакост $x + 8y = 2197 - 27z$, па треба много времена да се таква решења и преброје.

Напомена и извињење:
Из задатка је непажњом изостављено да мањих коцки има 2023, тј. задатак је требао да гласи:
Коцка чија је ивица 13 cm исечена је на 2023 мање коцке чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm.
Колико има коцки чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm?

Тада би се добијеној једначини $x + 8y + 27z = 2197$ придружила и једначина $x + y + z = 2023$ и одузимањем друге од прве једначине би се добила једначина $7y + 26z = 174$ која има јединствено решење $y = 10$, $z = 4$. Тада је $x = 2023 - 14 = 2009$.

4. Одреди бар једно решење једначине
$$\frac{x+2023}{23-x} + \frac{x+2022}{22-x} + \frac{x+2021}{21-x} + \frac{x+2020}{20-x} = 4\,.$$

Дата једначина је еквивалентна са једначином
$$\frac{x+2023}{23-x} - 1 + \frac{x+2022}{22-x} - 1 + \frac{x+2021}{21-x} - 1 + \frac{x+2020}{20-x} - 1 = 0.$$ Даље је
$$\frac{x+2023}{23-x} - \frac{23-x}{23-x} + \frac{x+2022}{22-x} - \frac{22-x}{22-x} + \frac{x+2021}{21-x} - \frac{21-x}{21-x} + \frac{x+2020}{20-x} - \frac{20-x}{20-x} = 0$$
и $$\frac{x+2023-23+x}{23-x} + \frac{x+2022-22+x}{22-x} + \frac{x+2021-21+x}{21-x} + \frac{x+2020-20+x}{20-x} = 0\,.$$

Следи да је $$\frac{2x+2000}{23-x} + \frac{2x+2000}{22-x} + \frac{2x+2000}{21-x} + \frac{2x+2000}{20-x} = 0$$ и коначно се добија једначина $$(2x+2000)\left(\frac{1}{23-x} + \frac{1}{22-x} + \frac{1}{21-x} + \frac{1}{20-x}\right) = 0$$ чије је једно решење $2x + 2000 = 0$ или $x = -1000$.

Напомена: Добијено решење није и једино решење дате једначине.

5. Дат је троугао ABC чија страница BC има дужину 24. Права p која је паралелна са BC пресеца странице AB и AC редом у тачкама D и E. Одреди дужину дужи DE, ако права p дели троугао ABC на два дела једнаких површина.

Прво решење:

Користи се чињеница да се се површине сличних троуглова односе као квадрати одговарајућих страница.

Нека је површина троугла ABC једнака 2P. Тада је површина троугла CDE једнака P.
Како су троуглови ABC и CDE слични то је $2P : P = BC^2 : DE^2 = 24^2 : DE^2$,
Следи да је $2 = 576 : DE^2$, па је $DE^2 = 576 : 2 = 288$ и $DE = 12\sqrt{2}$.

Друго решење:

Нека је површина троугла ABC једнака 2P. Тада је површина троугла CDE једнака P.
Нека је AA' висина троугла ABC једнака x, а висина троугла ADE једнака y.

Како су троуглови ADE и ABC слични то је DE : BC = DE : 24 = к и y : x = к.
Следи да је DE = 24к и y = кx.

Тада је 2P = 2 · BC · x : 2 = 24x и тада је P = DE · y : 2 = 24к · кx : 2 = 12к · 2x = 24к^{2}x.

Дакле 2P = 24x = 2 · 24к^2 · x, па је 2к^2 = 1 или $к = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Коначно је DE = 24к = 24 · $\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$.