ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

3. РАЗРЕД

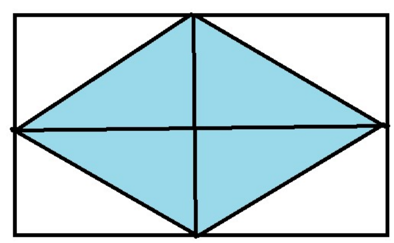
ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 11. 03. 2023,

1. Збир два троцифрена природна броја једнак је 345. Колики ће бити збир ако се:
   а) један сабирак повећа за 36, а други сабирак повећа за 47;
   б) један сабирак повећа за 36, а други сабирак умањи за 47;
   в) један сабирак умањи за 36, а други сабирак умањи за 47.

2. Две чоколаде и тег од 200 грама имају масу као 3 чоколаде и тег од 120 грама. Колика је маса 5 чоколада? Објасни решење.

3. Допуни магични квадрат на наредној слици (лево).

10		8
	7	



4. Колико се на претходној слици (десно) може уочити дужи, троуглова, оштрих, правих и тупих углова?

5. Располажемо са 4 кутије. У три кутије налази се оловке, а четврта је празна. Када се из прве кутије у четврту пребаци 17 оловки, из друге у четврту пребаци 26 оловки и из треће пребаци у четврту 35 оловки, онда ће у све четири кутије бити једнак број оловки. Колико је оловака било на почетку у свакој од кутија?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

4. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 11. 03. 2023.

1. Реши једначину: (x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 14) = 2023.

2. Књига иам 123 странице. Лена је првог дана прочитала више од 35, а другог дана више од 46 страница. Колико највише страница је Лени остало да прочита трећег дана?

3. Познато је да је $a - b + c = 2023$. Колико ће бити збир, ако се;
   а) сваки од бројева *a, b* и *c* увећа за 456;
   б) сваки од бројева *a, b* и *c* умањи за 78;
   в) број *a* увећа за 100, број *b* умањи за 300, а број *c* умањи за 500.

4. Улица има дужину 119 m и ширину 17 m. Град Математикус има у плану да поплоча улицу бетонским плочама. На располагању имају две врсте квадратних плоча. Прве су димензија 25 cm x 25 cm и имају цену од 50 динара по комаду. Друге плоче су димензија 17 cm x 17 cm и имају цену 32 динара по комаду. За које плоче ће се определити град Математикус водећи рачуна да трошкови буду што мањи?

5. Ако Анка поклони Бранки 34 салвета, онда ће обе имати једнак број салвета. Ако Бранка поклони Анки 34 салвета, онда ће Анка имати три пута више салвета од Бранке. Колико салвета има Анка, а колико Бранка?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 11. 03. 2023.

1. Углови α и β су комплементни, а углови β и γ суплементни. Одреди углове α, β и γ ако је $\alpha + \gamma = 200°$.

2. Збир разломака x и y је 0,5, а њихова разлика је $\frac{1}{6}$. Докажи да је број $n = 3 \cdot x + 6 \cdot y + 2023$ дељив са 45.

3. Колико решења у скупу N_o има једначина $3x + y \cdot y = 81$?

4. Одреди најмањи и највећи троцифрени природан број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 дају остатак 1. Колико има таквих троцифрених бројева?

5. На правој p дате су редом тачке A, B и S такве да је AB = 3 cm и AS = AB + BS = 5 cm.
   а) Нацртај квадрат ABCD.
   б) Нацртај квадрат $A_1B_1C_1D_1$ који је централно симетричан са квадратом ABCD ако је центар симетрије тачка S.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 11. 03. 2023.

1. Симетрале унутрашњих углова троугла ABC секу се у тачки S. Докажи да су углови $\angle ASB$, $\angle BSC$ и $\angle CSA$ тупи углови.

2. Збир два рационална броја $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ је 1,111111..., а њихова разлика је 0,5. Одреди природне бројеве a, b, c и d, ако је НЗД $(a, b) = 1$ и НЗД $(c, d) = 1$.

3. У троуглу ABC, на страници BC дата је тачка M таква да је AM нормално на BC. Конструисати троугао ABC, ако је AB = 6 cm, AM = 4 cm и AC = 7 cm.

4. Скуп S садржи 2023 различита проста броја.
   а) Да ли у скупу S постоји 2022 броја таква да је њихов збир и њихова разлика сложен број.
   б) Докажи да постоји скуп M који је подскуп скупа S такав да скуп M садржи бар 51 број са особином да је разлика свака два од њих дељива са 100.

5. У једнакокраком трапезу ABCD дијагонале AC и BD су симетрале углова на већој основици трапеза. Одредити углове и странице трапеза ако је обим трапеза 100 cm, а једна основица је два пута већа од друге.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
11. 03. 2023.

1. Дати су полиноми $A(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2$ и $B(x) = ax^2 + bx + c$. Са $A(x)$ и $B(x)$ означимо вредност полинома у тачки x. Ако је $x = 0$, онда је $B(x) = 3$. Ако је $x = 1$, онда је $A(x) = 6$. Ако је $x = –1$, онда је $A(x) + B(x) = 8$. Одреди бројеве a, b и c и израчунај колико је $A(x) – B(x)$, ако је $x = 2$.

2. У правоугаонику ABCD права p садржи тачку A, нормална је на дијагоналу BD и сече страницу CD у тачки E. На страници AB дата је тачка F, тако да је дуж EF паралелна са страницом BC. Ако дуж EF дијагоналу BD сече у тачки G, онда је AG нормално на BE. Докажи.

3. У троцифреном броју n све цифре су различите. Одреди највећи троцифрен број n, такав да је број $6^{n+3} + 7^{n+1} + 8^n + 9^{n+2}$ дељив са 10?

4. Виктор, Марко и Александар треба да поделе 2023 динара, тако да свако од њих добије бар један динар. На колико начина то могу урадити?

5. У правоуглом троуглу за мерне бројеви полупречника описаног круга R и уписаног круга r важи релација $R : r = 5 : 2$. Одреди колико је $a : b : c$, где су a и b катете, а c хипотенуза тог правоуглог троугла..

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

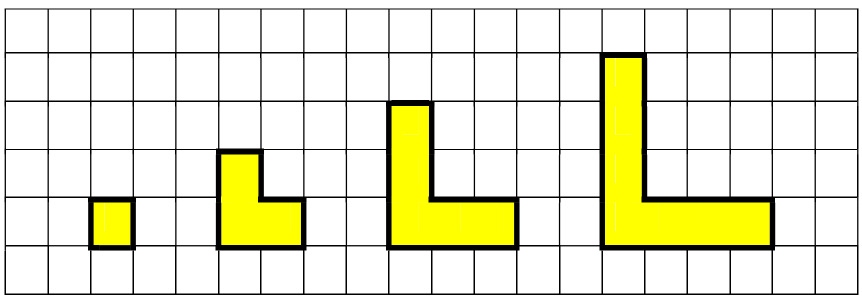
Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2022/23

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 11. 03. 2023.

1. У квадратној мрежи чија је страница једнака 1, дат је низ од n фигура ($n \in N$). Прве четири фигуре у низу дате су на наредној слици.



   а) Израчунај површине прве четири фигуре у низу.
   б) Колика је површина 23. фигуре у низу?
   в) Изрази површина P, n-те фигуре у низу у зависности од n?
   г) Изрази збир површина S, n фигура у том низу у зависносри од n?

2. У ком односу се секу висине правилне једнакоивичне тростране пирамиде?

3. У троуглу ABC, мерни бројеви страница и мерни број површине су природни бројеви. Одредити страницу AC и површину P, ако је AB = 6 и BC = 5. Колико има решења?

4. Дат је квадрат ABCD у коме је M је средиште странице AD, а N средиште странице CD. Дужи BN и CM секу се у тачки P. Одреди обим и површину квадрата, ако је површина троугла BMP једнака 30.

5. Колико има десетоцифрених природних бројева код којих је производ цифара мањи од 4?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА:

3. РАЗРЕД

1. Збир два троцифрена природна броја једнак је 345. Колики ће бити збир ако се:
   а) један сабирак повећа за 36, а други сабирак повећа за 47;
   б) један сабирак повећа за 36, а други сабирак умањи за 47;
   в) један сабирак умањи за 36, а други сабирак умањи за 47.

а) Збир се увећа за 36 + 47 = 83 и нови збир ћрбити 345 + 83 = 428;
б) Збир се увећа за 36 у мањи за 47, па ће бити 345 + 36 – 47 = 381 – 47 = 334;
в) Збир се умањи за 36 и за 47 и нов збир ће бити 345 – 36 – 47 = 309 – 47 = 262.

2. Две чоколаде и тег од 200 грама имају масу као 3 чоколаде и тег од 120 грама. Колика је маса 5 чоколада? Објасни решење.

Замислимо да имамо уарвнотежене теразије. Ако се оба таса скинемо по две чоколаде, на левом тасу ће остати тег од 200 грама, а на десном једна чоколада и тег од 120 грама. Ако у другом потезу и са једног и са другог таса скинемо по 120 грама, на једном тасу ће остати 80 грама, а на другом једна чоколада. Дакле, једна чоколада има масу 80, а 5 чоколада 5 · 80 = 400 грама.

3. Допуни магични квадрат на наредној слици.

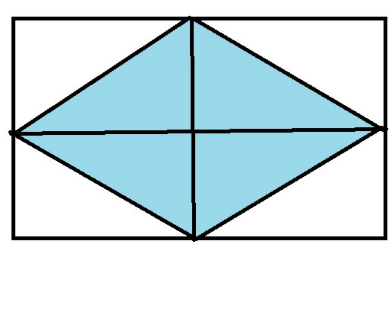
Нека је централни број магичног квадрата x.
Тада је x + 7 = 10 + 8, јер је у збиру празно поље и по хоризонтали и по вертикали једнако.
Дакле x + 7 = 18, па је x = 18 – 7 = 11, а карактеристични збир једнак 3 · 11 = 33.
Остали бројеви се лако попуњавају допуњавајући хоризонтале, вертикале и дијагонале до 33.

10		8
	x	
	7	

10	15	8
9	11	13
14	7	12

4. Колико се на наредној слици може уочити дужи, троуглова, оштрих, правих и тупих углова?

На датој слици има:
а) 6 · 3 + 4 = 18 + 4 = 22 дужи;
б) 8 + 4 = 12 троуглова;
в) 4 · 4 + 2 = 18 оштрих углова;
г) 4 + 4 + 4 · 2 = 16 правих углова;
д) 4 · 2 + 2 = 10 тупих углова.



5. Располажемо са 4 кутије. У три кутије налази се оловке, а четврта је празна. Када се из прве кутије у четврту пребаци 17 оловки, из друге у четврту пребаци 26 оловки и из треће пребаци у четврту 35 оловки, онда ће у све четири кутије бити једнак број оловки. Колико је оловака било на почетку у свакој од кутија?

У четврту кутију је пребачено 17 + 26 + 35 = 78 оловки, тако да се број оловки у свим кутијама изједначио. То значи да пре пребацивања у првој кутији било 78 + 17 = 95 оловки; у другој кутији 78 + 26 = 104 оловке и у трећој кутији 78 + 35 = 113 оловки.
Провера: $4 \cdot 78 = 312 = 95 + 104 + 113 = 312$.

4. РАЗРЕД

1. Реши једначину: $(x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 14) = 2023$.

Када се у датој једначини избришу заграде и примени закон премештања сабирака добија се низ једнакости:
$(x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 14) = 2023$;
$x + 1 + x + 2 + ... + x + 14 = 2023$;
$14x + 1 + 2 + 3 + ... + 14 = 2023$;
$14x + 7 \cdot 15 = 14x + 105 = 2023$;
$14x = 2023 – 105 = 1918$;
$x = 1918 : 14 = 137$.
Решење дате једначине је број 137.

2. Књига има 123 странице. Лена је првог дана прочитала више од 35, а другог дана више од 46 страница. Колико највише страница је Лени остало да прочита трећег дана?

Нека је Лени остало да прочита још x страна дате књиге.
Тада је $x + 36 + 47 \leq 123$, па је $x + 83 \leq 123$ и $x \leq 123 – 83$, тј $x \leq 40$.
Према томе Лени је остало да прочита највише 40 страница књиге.

Друго решење: Лена је првог дана прочитала 36 или више страница књиге, а другог дана 47 или више. Према томе у току прва два дана Лена је прочитала најмање 36 + 47 = 83 стране те књиге. Трећег дана је остало да прочита највише 123 – 83 = 40 страна књиге.

3. Познато је да је $a – b + c = 2023$. Колико ће бити збир, ако се;
а) сваки од бројева a, b и c увећа за 456;
б) сваки од бројева a, b и c умањи за 78;
в) број a увећа за 100, број b умањи за 300, а број c умањи за 500.

а) Ако је $a – b + c = 2023$, онда је
$(a +456) – (b + 456) + (c + 456) = 2023 + 456 – 456 + 456 = 2023 + 456 = 2479$.
б) Ако је $a – b + c = 2023$, онда је
$(a – 78) – (b – 78) + (c – 78) = 2023 – 78 + 78 – 78 = 2023 – 78 = 1945$.
б) Ако је $a – b + c = 2023$, онда је
$(a + 100) – (b – 300) + (c – 500) = 2023 + 100 + 300 – 500 = 2023 – 100 = 1923$.

4. Улица има дужину 119 m и ширину 17 m. Град Математикус има у плану да поплоча улицу бетонским плочама. На располагању имају две врсте квадратних плоча. Прве су димензија 25 cm x 25 cm и имају цену од 50 динара по комаду. Друге плоче су

димензија 17 x 17 cm и имају цену 32 динара по комаду. За које плоче ће се определити град Математикус водећи рачуна да трошкови буду што мањи?

Површина улице је $119 \cdot 17 = 2023\ m^2 = 2023\ 0000\ cm^2$.
Површина прве плоче је $25 \cdot 25 = 625\ cm^2$.
То значи да за поплочавање улице треба 20230000 : 625 = 32368 плоча.
Те плоче коштају $32368 \cdot 50 = 1\ 618\ 400$ динара.

Површина друге плоче је $17 \cdot 17 = 289\ cm^2$.
То значи да за поплочавање улице треба 20230000 : 289 = 70 000 плоча.
Те плоче коштају $70\ 000 \cdot 32 = 2\ 240\ 000$ динара.
Према томе град Математикус ће улицу поплочати првим плочама.

Друго решење: На дужину од 119 m може се поређати $119 \cdot 4 = 476$ првих плоча.
На ширину од 17 m може се поређати $17 \cdot 4 = 68$ првих плоча.
Значи да за поплочавање улице првим плочама треба $476 \cdot 68 = 32\ 368$ плоча.

На дужину од 119 m може се поређати 11900 cm : 17 cm = 700 других плоча.
На ширину од 17 m може се поређати 1700 cm : 17 = 100 других плоча.
Значи да за поплочавање улице другим плочама треба $700 \cdot 100 = 70\ 000$ плоча.

Прве плоче коштају $32368 \cdot 50 = 1\ 618\ 400$ динара, а друге плоче $70\ 000 \cdot 32 = 2\ 240\ 000$ динара. Према томе прво поплочавање је за град Математикус јефтиније од другог.

5. Ако Анка поклони Бранки 34 салвета, онда ће обе имати једнак број салвета. Ако Бранка поклони Анки 34 салвета, онда ће Анка имати три пута више салвета од Бранке. Колико салвета има Анка, а колико Бранка?

Из чињенице да ако Анка поклони Бранки 34 салвета, онда ће обе имати једнак број салвета, закључује се да Анка има 34 + 34 = 68 салвета више од Бранке.
Ако Бранка има x салвета, Анка има x + 68 салвета.
Ако Бранка поклони Анки 34 салвета, онда ће она имати x – 34 салвета, а Бранка x + 68 + 34 салвета.
Из другог услова је $x + 68 + 34 = 3 \cdot (x – 34)$.
Следи да је $x + 102 = 3x – 102$, па је $3x – 102 – x = 102$ или $2x – 102 = 102$.
Коначно је $2x = 102 + 102$, па је $x = 102$.

То значи да је Бранка имала 102, а Анка 102 + 68 = 170 салвета.
Провера: $102 + 34 = 136 = 170 – 34$ и $102 – 36 = 66$, а $170 + 34 = 204 = 3 \cdot 68$.

5. РАЗРЕД

1. Углови α и β су комплементни, а углови β и γ суплементни. Одреди углове α, β и γ ако је $\alpha + \gamma = 200°$.

Како су углови α и β комплементни, то је $\alpha + \beta = 90^o$.
Из чињенице да су β и γ суплементни, следи да је $\beta + \gamma = 180^o$.
Како је $\alpha + \gamma = 200°$, то је угао α за $200 – 180 = 20^o$ већи од угла β.
Према томе $\beta + 20^o + \beta = 90^o$, што значи да је $\beta = 35^o$ и $\alpha = 55^o$.
Тада је $\gamma = 180^o – 35^o = 200° - 55^o = 145^o$.

2. Збир разломака x и y је 0,5, а њихова разлика је $\frac{1}{6}$. Докажи да је број

$n = 3 \cdot x + 6 \cdot y + 2023$ дељив са 45.

Како се бројеви x и y разликују за $\frac{1}{6}$, то је $x = y + \frac{1}{6}$.

Тада је $y + \frac{1}{6} + y = \frac{1}{2}$, па је $2y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Следи да је $y = \frac{1}{6}$ и $x = y + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Закључујемо да је $n = 3 \cdot x + 6 \cdot y + 2023 = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 1 + 1 + 2023 = 2025$.

Број 2025 се завршава цифром 5, а збир цифара му је 9, па је очигледно дељив са 45.

3. Колико решења у скупу N_o има једначина $3x + y \cdot y = 81$?

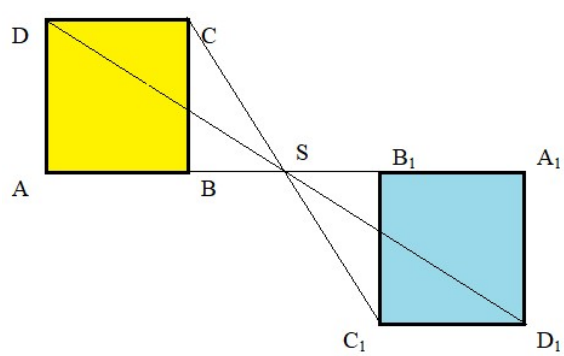
Како је број 3x дељив са 3 и број 81 дељив са 3, то мора бити и број $y \cdot y$, па је y број који је дељив са 3.
С друге стране $y \cdot y$ мор бити мање или једнако 81, па је y број који је мањи или једнак 9.
То значи да је $y \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Следи да једначина има 4 решења: y = 0, x = 27; y = 3, x = 24; y = 6, x = 15 и y = 9, x = 0.
У облику уређених парова решења су; (27, 0), (24, 3), (15, 6), (0, 9).

4. Одреди најмањи и највећи троцифрени природан број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 дају остатак 1. Колико има таквих троцифрених бројева?

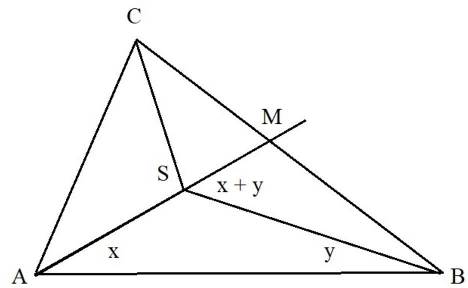
Број који је дељив са 2, 3, 4, 5 и 6 мора бити дељив са НЗС (2, 3, 4, 5, 6) а то је број 60.
Дакле тражени број има облик 60к + 1. јер ће онда свако дељење имати остатак 1.
Најмањи такав троцифрен број је 121, а највећи 961.
Сви такви троцифрени бројеви су 121, 181, 241, ... , 901, 961 и има их колико низ
120, 180, 240 ... 900, 960, ондосно низ 2, 3, 4, 15, 16 има чланова. А то значи 15.

5. На правој p дате су редом тачке A, B и S такве да је AB = 3 cm и AS = AB + BS = 5 cm.
а) Нацртај квадрат ABCD.
б) Нацртај квадрат $A_1B_1C_1D_1$ који је централно симетричан са квадратом ABCD ако је центар симетрије тачка S.



6. РАЗРЕД

1. Симетрале унутрашњих углова троугла ABC секу се у тачки S. Докажи да су углови $\angle ASB$, $\angle BSC$ и $\angle CSA$ тупи углови.



Нека је $\angle BAS = x$ и $\angle ABS = y$. Тада је $\angle BAC = 2x$ и $\angle ABC = 2y$.
Како је $2x + 2y < 180°$, то је $x + y < 90°$.
Угао BSM, као спољашњи угао троугла ABS једнак је $x + y$.
Тада је унутрашњи угао троугла ABS - $\angle ASB = 180° - (x + y)$.
Како је $x + y < 90°$ то је $\angle ACS = 180° - (x + y) > 90°$, тј. Туп угао.
На аналоган начин се доказ изводи и за два преостала угла.

2. Збир два рационална броја $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ је 1,111111..., а њихова разлика је 0,5. Одреди природне бројеве *a, b, c* и *d*, ако је НЗД $(a, b) = 1$ и НЗД $(c, d) = 1$.

Нека је $e = 1{,}11111$ .... Тада је $10e = 11{,}11111$ .... па је $10e - e = 9e = 10$.
То значи да је $e = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{10}{9}$ и $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{2}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{1}{2}$.

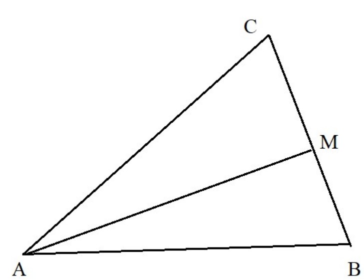
Следи да је $\frac{c}{d} + \frac{1}{2} + \frac{c}{d} = \frac{10}{9}$ и да је $2 \cdot \frac{c}{d} = \frac{10}{9} - \frac{1}{2} = \frac{11}{18}$ и $\frac{c}{d} = \frac{11}{36}$.

Тада је $\frac{a}{b} = \frac{11}{36} + \frac{1}{2} = \frac{29}{36}$.

Закључујемо да је $a = 29$, $b = 36$, $c = 11$ и $d = 36$.

3. У троуглу ABC, на страници BC дата је тачка M таква да је AM нормално на BC. Конструисати троугао ABC, ако је AB = 6 cm, AM = 4 cm и AC = 7 cm.

Анализа: Троуглови AMB и AMC су правоугли.
У оба троугла знамо катету AM = 4 cm и хипотенузе –
AB = 6 cm и AC = 7 cm.



Конструкција: На правој p се одабере тачка M и конструише дуж MA која је нормална на p и има дужину 4 cm. Остаје да се на правој p одреде тачке B и C такве да је AB = 6 cm и AC = 7 cm.
Постоје два решења: када је троугао ABC оштроугли и када је троугао ABC је тупоугли.

4. Скуп S садржи 2023 различита проста броја.

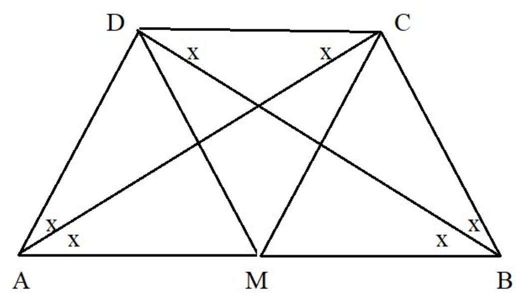
   а) Да ли у скупу S постоји 2022 броја таква да је њихов збир и њихова разлика сложен број.

   б) Докажи да постоји скуп M који је подскуп скупа S такав да скуп M садржи бар 51 број са особином да је разлика свака два од њих дељива са 100.

а) Како скуп S садржи 2023 различита прост броја, то су 2022 од њих непарна. Збир два непарна броја је увек паран број. Дакле, тврђење је тачно за збир, а није за разлику, јер ако . су прости бројеви „близанци" (на пример (3, 5), (5,7), (11, 13), (17, 19)) разлика је 2, што није прост број.

б) Сви прости бројеви се завршавају цифрама 1, 2, 3, 5, 7 и 9. Када из скупа S издвојимо 2 и 5, онда остаје 2021 различита проста броја који се завршавају цифрама 1, 3, 7 и 9. Двоцифрени завршеци тих бројева су 01, 03, 07, 09, 11, 13, 17, 19, ..., 91, 93, 97, 99. и има их тачно $4 \cdot 10 = 40$. Како је 2021 : 40 = 50 (21) то на основу Дирихлеовог принципа постоје два броја са једнаким двоцифреним завршетком. Разлика та два броја је дељива са 100.

5. У једнакокраком трапезу ABCD дијагонале AC и BD су симетрале углова на већој основици трапеза. Одредити углове и странице трапеза ако је обим трапеза 100 cm, а једна основица је два пута већа од друге.



Нека је M средиште веће основице трапеза (AM = MB = CD) и нека дијагонале AC и BD деле угао на основици на два једнака дел који имају мерни број x.
Како су дужи AM и CD и BM и CD једнаке и паралелне то су четвороуглови AMCD и BCDM паралелограми, па је AD = MC и BC = MD. Трапез је једнакокрак, па је AD = BC, што значи да је AD = DM = MC = BC.
С друге стране троуглови ACD и BCD су једнакокраки (два угла имају мерни број x), па је AD = CD = BC = DM = CM = AM = BM и троуглови AMD, MCD и BCM су једнакостранични.
Према томе углови трапеза на већој основици су по 60°, а углови трапеза на мањој основици су по 120°.
Из обима трапеза AB + BC + CD + DA = 2CD + CD + CD + CD = 5CD = 100 cm следи да је CD = 20 cm и тада је AB = 40 cm и BC = CD = DA = 20 cm.

Напомена: Постоје и друге идеје за решење (допуна трапеза до једнакостраничног троугла ABE што се може доказати; доказ да су паралелограми AMCD и MBCD ромбови ...).

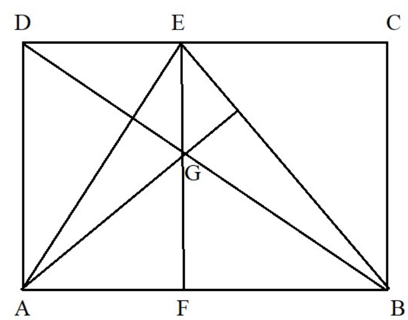
7. РАЗРЕД

1. Дати су полиноми $A(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2$ и $B(x) = ax^2 + bx + c$. Са $A(x)$ и $B(x)$ означимо вредност полинома у тачки x. Ако је $x = 0$, онда је $B(x) = 3$. Ако је $x = 1$, онда је $A(x) = 6$. Ако је $x = -1$, онда је $A(x) + B(x) = 8$. Одреди бројеве a, b и c и израчунај колико је $A(x) - B(x)$, ако је $x = 2$.

Ако је $B(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 3$, то значи да је $c = 3$.
Ако је $A(1) = a \cdot 1^6 + b \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 = a + b + c = a + b + 3 = 6$, онда је $a + b = 3$.
Ако је $A(-1) + B(-1) = a \cdot (-1)^6 + b \cdot (-1)^4 + c \cdot (-1)^2 + a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 8$, онда је $a + b + c + a - b + c = 2a + 2c = 8$ и $2a = 8 - 6 = 2$, па је $a = 1$ и $b = 2$.

Тада је $A(2) - B(2) = 1 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 - (1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3) = 64 + 32 + 12 - (4 + 4 + 3) = 108 - 11 = 97$.

2. У правоугаонику ABCD права p садржи тачку A, нормална је на дијагоналу BD и сече страницу CD у тачки E. На страници AB дата је тачка F, тако да је дуж EF паралелна са страницом BC. Ако дуж EF дијагоналу BD сече у тачки G, онда је AG нормално на BE. Докажи.



Ако се уочи троугао ABE, онда је из услова задатка AE $\perp$ BD.
Како је EF паралелно са BC, то је EF $\perp$ AB.
Следи да је пресечна така правих BD и EF, а то је тачка G ортоцентар троугла ABE.
Тада је права AG нормална на дуж BE.

3. У троцифреном броју n све цифре су различите. Одреди највећи троцифрен број n, такав да је број $6^{n+3} + 7^{n+1} + 8^n + 9^{n+2}$ дељив са 10?

Број $6^{4к+3}$ (и било који степен броја 6) се увек завршава цифром 6.
Број $7^{4к}$ се завршава цифром 1, а број $7^{4к+1}$ цифром 7.
Број $8^{4к}$ се завршава цифром 6.
Број $9^{4к}$ се завршава цифром 1, а број $9^{4к+2}$ такође цифром 1.

Дакле, број $6^{4к+3} + 7^{4к+1} + 8^{4к} + 9^{4к+2}$ се завршава цифром 6 + 7 + 6 + 1, а то је цифра 0.
Према томе n је највећи троцифрен број облика $4к$ који има различите цифре, што значи да то није 996, ни 992, ни 988, већ број 984.

4. Виктор, Марко и Александар треба да поделе 2023 динара, тако да свако од њих добије бар један динар. На колико начина то могу урадити?

Прво решење: Ако у низу напишемо 2023 јединице 1 1 1 ... 1 1 1 и између јединица на два места ставимо две цртe (преграде), онда су са те две преграде дефинисана три природна броја од којих сваки представља збир јединица у том делу низа .
Тим преградама дефинисано је 2022 · 2021 : 2 = 1011 · 2021 = 2 043 231 начина, јер се прва преграда може поставити на 2022 места, друга преграда на 2021 место, а све се дели са 2, јер исти положај прве и друге преграде не дефинише две, већ само једну поделу. (Напомена: Преграде не могу бити једна до друге, јер свако мора добити бр један динар.)

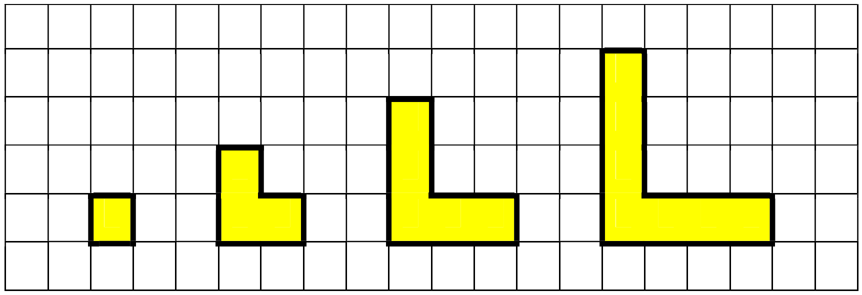
Друго решење: Једначина $x + y = n$ у скупу природних бројева има $n - 1$ решење ((1, $n - 1$), (2, $n - 2$), ... ($n - 1$, 1)).
Ако први дечак добије 1 динар, онда преостала двојица деле 2022 динара и постоји 2021 подела; ако први дечак добије 2 динара, онда постоји 2020 подела; ... Ако први дечак добије 2021 динар онда постоји само једна подела 1 + 1.
Укупан број подела је 2021 + 2020 + ... + 2 + 1 = 2021 · 2022 : 2 = 2 043 231 подела.

5. У правоуглом троуглу за мерне бројеви полупречника описаног круга R и уписаног круга r важи релација $R : r = 5 : 2$. Одреди колико је $a : b : c$, где су a и b катете, а c хипотенуза тог правоуглог троугла.

У правоуглом троуглу полупречник описаног круга R је једнак половини хипотенузе, тј, c = 2R. Полупречник уписаног круга r = (a + b – c) : 2.
Нека је R : r = 5 : 2, тј. R = 5к и r = 2к. Тада је c = 2R = 10к, а r = (a + b – c) : 2 = 2к.
Из a + b – c = 4к, добија се да је a + b = 4к + 10к = 14к.
Тада је $(a + b)^2 = (14к)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 196к^2$.
Како је $c^2 = a^2 + b^2 = 100к^2$, то је $100к^2 + 2ab = 196к2$, па је $2ab = 196к^2 – 100к^2 = 96к^2$.
Следи да је $a^2 + b^2 – 2ab = (a – b)^2 = 100к^2 – 96к^2 = 4к^2$ и a - b = 2к.
како је a + b = 14к и a – b = 2к, то је a = 8к и b = 6к.
Дакле a : b : c = 8к : 6к : 10к = 4 : 3 : 5.
Тачан одговор је, наравно, и 3 : 4 : 5 (зависно која је од катета већа).

8. РАЗРЕД

1. У квадратној мрежи чија је страница једнака 1, дат је низ од n фигура ($n \in$ N). Прве четири фигуре у низу дате су на наредној слици.
   а) Израчунај површине прве четири фигуре у низу.
   б) Колика је површина 23. фигуре у низу?
   в) Изрази површина P, n-те фигуре у низу у зависности од n?
   г) Изрази збир површина S, n фигура у том низу у зависносри од n?



а) Површине фигура на слици су редом 1, 3, 5 и 7.

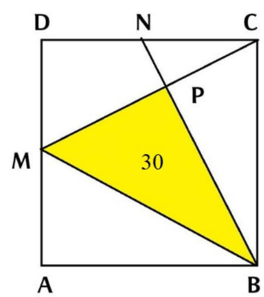
б) Површина 23. фигуре у низу је 23 + 22 = 45.

в) Површина n-те фигуре у низу је $n + n - 1 = 2n - 1$.

г) Збир површина п фигура у низи је $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 3 + 2n - 1 = n \cdot 2n : 2 = n^2$.

Напомена (мало геометрије): Када се друга фигура допуни првом добије се квадрат чија је страница 2; када се трећа фигура у низу допуни збиром претходне две, добије се квадрат странице 3. Када се четврта фигура допуни квадратом странице 3, добије се квадрат странице 4 и тако све до краја када се n-та фигура допуни квадратом странице $(n - 1)$.

2. Дат је квадрат ABCD у коме је M је средиште странице AD, а N средиште странице CD. Дужи BN и CM секу се у тачки P. Одреди обим и површину квадрата, ако је површина троугла BMP једнака 30.



Ако је страница квадрата CD = $2a$, онда је CN = a.

Правоугли троуглови MCD и BCN су подударни (BC = CD = $2a$, CN = DM = a и $\angle BCN = \angle CDM = 90°$).

Ако је $\angle MCD = \varphi$ $\angle CBN$, а онда је $\angle BNC = 90° - \varphi$ и $\angle CPN = 90°$.

Троуглови BCN и CNP су слични, јер су им углови 90°, φ и $90° - \varphi$.

Ако је PN = x, због сличности је CP = 2x, па је $CN^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2 = a^2$.

Како је Таад је $CM^2 = BN^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 = 25x^2$, па је MC = BN = 5x.

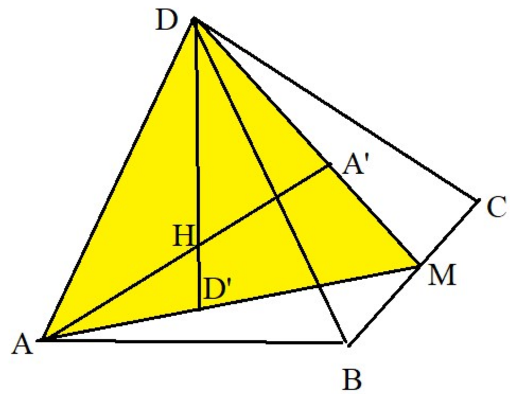
То значи да је MP = 5x – 2x = 3x и BP = 5x – x = 4x.

Површина правоуглог троугла MPB је $3x \cdot 4x : 2 = 6x^2 = 30$, па је $x^2 = 5$.

Површина квадрата је $4a^2 = 4 \cdot 5x^2 = 20x^2 = 100$.

Страница квадрата је 10, па је обим квадрата 40.

3. У ком односу се секу висине правилне једнакоивичне тростране пирамиде?



Нека је основна ивица пирамиде једнака a.

У карактеристичном троуглу AMD који је једнакокрак (AM = MD = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$) бочне висине AA' и DD' су висине пирамиде и секу се у тачки H.

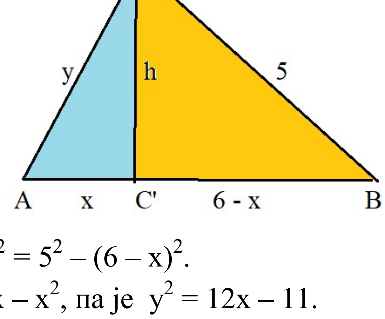
Како је AD' = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, то је висина пирамиде $(DD')^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2$, па је

DD' = $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из сличности троуглова AHD' и AA'M је AH : HD' = AM : A'M =

$\frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{6}$ = 6 : 2 = 3 : 1. Како је AH = DH, то је DH : HD' = 3 : 1.

4. У троуглу ABC, мерни бројеви страница и мерни број површине су природни бројеви. Одредити страницу AC и површину P, ако је AB = 6 и BC = 5. Колико има решења?

Прво решење: Нека је висина CC' из темена C троугла ABC једнака h, а одсечци које висина прави на страници AB једнаки AC' = x и BC' = 6 – x.



Ако је AC = y, онда је $h^2 = y^2 - x^2 = 5^2 - (6 - x)^2$.

Следи да је $y^2 - x^2 = 25 - 36 + 12x - x^2$, па је $y^2 = 12x - 11$.

Како је $1 \le x \le 6$, тада су тражене вредности за $12x - 11 = y^2 \in \{ 1, 13, 25, 37, 49, 61 \}$.

Како су x и y природан бројеви то у обзир долазе вредности:

$x = 1$, $y = 1$; $x = 3$, $y = 5$: $x = 5$, $y = 7$.
Пар (1, 1) отпада јер мора бити y као хипотенуза мора бити веће од x као катете.
Пар (5, 7) отпада, јер је тада $h^2 = 49 – 25 = 24$, па h, а самим тим и површина неће бити природни број.
Једино решење је $x = 3$, $y = 5$, $h^2 = 25 – 9 = 16$ и $h = 4$.
Странице троугла су 6, 5, 5, а површина 12.

Друго решење: Нека је $AC = x$.
Тада је обим троугла $ABC = 6 + 5 + x = 11 + x$.
Из Хероновe формуле се добија да је $P = \sqrt{\frac{11+x}{2}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{11-x}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{(121-x^2)\cdot(x^2-1)}$.
Да би површина била природан број мора бити $(121 – x^2)(x^2 – 1) = y^2$.
Следи да је $1 < x < 11$. Заменом вредности 2, 3, ... , 9, 10 за x добија се да су одговарајуће вредности за $y^2 \in \{ 117 \cdot 3, 112 \cdot 8, 105 \cdot 15, 96 \cdot 24, 85 \cdot 35, 72 \cdot 48, 55 \cdot 63, 40 \cdot 80, 21 \cdot 99 \} =$

$= \{ 351, 896, 1575, 2304, 2975, 3456, 3465, 3200, 2079\}$.
Једини потпун квадрат је $2304 = 48^2$, па је за $x = 5$, $P = 48 : 4 = 12$.

5. Колико има десетоцифрених природних бројева код којих је производ цифара мањи од 4?

Ако је производ цифара мањи од 4, онда производ цифара може бити 0, 1, 2 или 3.

Ако је производ цифара 0, онда је бар једна (али не прва) цифра мора бити 0.
Таквих бројева има $9 \cdot 10^9 – 9^{10}$, јер су од укупног броја десетоцифрених бројева одузети бројеви који не садрже ни једну нулу.
Бројева чији је производ цифара 1 има само 1, а то је број 1111111111.
Бројева чији је производ цифара 2 има 10 (1111111112, 1111111121, ..., 2111111111).
Бројева чији је производ цифара 3 има такође 10 (1111111113, ... 3111111111).

Бројева који имају производ цифара мањи од 4 има $9 \cdot 10^9 – 9^{10} + 21$.