



ЦЕНТАР
ЗА
ПРОМОЦИЈУ
НАУКЕ

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО



NATASA KOVACEVIC
FOUNDATION
FONDACIJA NATAŠA KOVAČEVIĆ

М

МАЈ
МЕСЕЦ
МАТЕМАТИКЕ
2023.

ДИОФАНТОВО ЗАВРШНО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ШКОЛСКУ 2022/2023. ГОДИНУ

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

СРБИЈА МИСЛИ! СРБИЈА РЕШАВА!



ЦЕНТАР
ЗА
ПРОМОЦИЈУ
НАУКЕ

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО



NATASA KOVACEVIC
FOUNDATION
FONDACIJA NATAŠA KOVAČEVIĆ



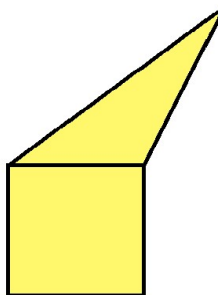
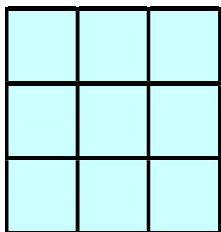
ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

3. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023,

3. РАЗРЕД

1. Колико има троцифрених природних бројева чији производ цифара је 6?
2. Дешифруј сабирање: $AAA + AA + A = ABC$. Колико има решења?
3. Конструирај магични квадрат, тако да је збир бројева по хоризонталама, вертикалама и дијагоналама једнак 333, а сви елементи магичног квадрата су различити непарни природни бројеви.



4. Квадрат и троугао на слици имају једнаке обиме. Колики је обим целе фигуре (жуто обојене) ако страница квадрата има дужину 6 cm? _
5. Влада, Нада и Јагода заједно имају 124 године. Колико година има свако од њих, ако је Нада имала 11 година, када је Влада имао 13 година, а Јагода 4 године.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

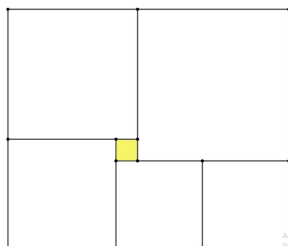
4. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023.

1. Колико има четвороцифрених природних бројева чији производ цифара је 8, а збир цифара је непаран број?
2. Ако је $A \cdot BA \cdot BA = 2023$, колико је $AB \cdot BA$?
3. Одреди најмањи природан број x , тако да дати квадрат постане магични.

	34	
40	x	
		37

4. Правоугаоник је подељен на 6 квадрата (види слику). Одреди обим и површину правоугаоника, ако је површина обојеног квадрата једнака 9 cm^2 .



5. Три молера за 4 дана окрече 5 станова. Колико станова ће окречити 7 молера за 12 дана?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023.

1. Одреди све двоцифрене просте бројеве, чији је збир цифара, такође прост број.
2. Шта је веће $\frac{8}{2023}$ или $\frac{77}{22254}$?
3. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ су комплементни. Израчунај углове α , β и γ , ако је $\gamma + \alpha = 111^\circ$.
4. Одреди просте бројеве p , q и r такве да је $p \cdot q \cdot r + 3 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p = 188$.
5. Дат је скуп $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 2021, 2022, 2023 \}$. Постоје ли подскупови B и C датог скупа A , такви да је $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$ и збир елемената скупа B једнак збиру елемената скупа C ? Ако постоје, наведи један пример таквих скупова B и C .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

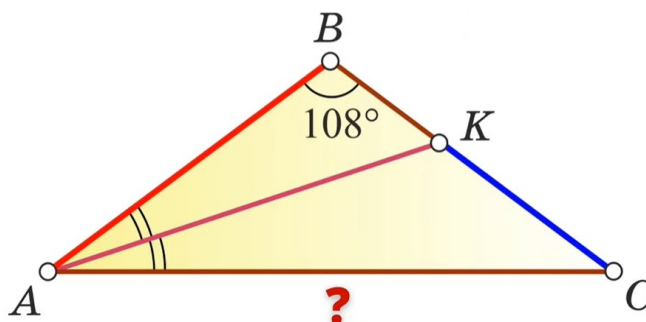


ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023.

1. Три молера за 4 дана окрече 5 станова. Колико станова ће окречити 7 молера за 12 дана? За колико дана ће 24 молера окречити 60 станова? Колико молера треба ангажовати да би за 12 дана окречили 45 станова?
2. Дат је неједнакокраки трапез ABCD. Нека су M и N средишта основица AB и CD трапеза и нека је дуж MN једнака полуразлици основица трапеза. Израчунај збир углова на мањој основици трапеза.
3. Одреди све двоцифрене бројеве који су 7 пута већи од збира својих цифара.
4. У једнакокраком троуглу троуглу ABC, $AB = BC$, $\angle ABC = 108^\circ$ и симетрала угла $\angle CAB$ сече страницу BC у тачки K. Израчунај дуж AC, ако је $AB + KC = 2023$.



5. Бројеви од 1 до 1000 (закључно са 1000) исписани су редом по кружности. Почевши од 1 прецртавамо сваки петнаести број (1, 16, 31, 46,...) при чему при поновним обилазцима кружнице већ прецртане бројеве поново урачунавамо (прецртавамо). Колико ће бројева остати непрецртано?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023.

1. Одреди најмањи и највећи четвороцифрени природан број који при дељењу са 11 дају остатак 10 и при дељењу са 10 даје остатак 3.
2. Полупречник кружнице описане око правилног осмоугла је 8 cm. Израчунај површину правилног осмоугла.
3. У дувачком оркестру музичари су на паради били постројени у квадратном облику (n редова са n музичара). Потом се оркестар трансформисао тако што је повећан број редова за 5, а у сваком реду је био једнак број музичара. Одреди колико је музичара било у том оркестру и како је изгледала формација оркестра пре и после престојавања.
4. Дат је једнакостранични троугао ABC и на луку BC кружнице описане око троугла тачка M . Докажи да је $AM = BM + CM$.
5. Паук се креће по прозорској решетки која је у облику квадратне мреже димензија 4×4 . Кретање паука је праволинијско, корак по корак, од чвора до чвора решетке, али увек десно или горе, при чему паук полази из левог доњег угла решетке, а циљ му је да ухвати муву која се налази у десном горњем углу решетке. а) Колико најмање корака треба пауку до циља ? б) На колико различитих начина може паук стићи до муве ?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2022/23

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023.

1. Коцка чија је ивица 10 cm пресечена је са равни која је од три ивице са заједничким теменом А одсеца дужи АМ, АН и АР једнаке дужине. Ако је однос запремина добијених делова коцке $371 : 4$, одредити разлику површина тих делова.
2. Збир цифара броја 7^{2023} је a . Збир цифара броја a једнак је броју b , а збир цифара броја b једнак је броју c . Одредити број c .
3. Одредити све троцифрене бројеве $\overline{abc}$, чије су све цифре различите од нуле, ако за његове цифре a, b и c за важи једнакост $a + b + c = 9$ и неједнакост $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6abc \leq a^3 + b^3 + c^3$.
4. На столу се налазе математичке књиге, Срђан је узео трећину књига и још једну књигу. Влада је узео трећину преосталих књига и још две књиге. Пера је узео трећину преосталих књига и још три књиге. Бојан је узео трећину преосталих књига и још четири књиге. На столи је остало још 10 књига. Колико књига је било на столу и колико књига је узео сваки од математичара?
5. У полукруг полупречника r уписан је правоугаоник, чија су два темена на пречнику круга а друга два на кружности. Одреди обим правоугаоника који има највећу површину.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

3. РАЗРЕД

1. Колико има троцифрених природних бројева чији производ цифара је 6?

Како је $6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, троцифрени бројеви чији је производ цифара су: 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312 и 321 и има их 9.

2. Дешифруј сабирање: $AAA + AA + A = ABC$. Колико има решења?

Из дате једнакости $AAA + AA + A = ABC$, следи да је $AA + AA + A = BC$, дакле двоцифрен број. То значи је цифра А мања од 5, јер ако би били већи или једнаки 5, онда би збир $AA + AA + A$ био троцифрен број.

Тражена сабирања су $111 + 11 + 1 = 123$; $222 + 22 + 2 = 246$; $333 + 33 + 3 = 369$ и $444 + 44 + 4 = 492$ и има 4 различита решења.

3. Конструирај магични квадрат, тако да је збир бројева по хоризонталама, вертикалама и дијагоналама једнак 333, а сви елементи магичног квадрата су различити непарни природни бројеви.

Ако је карактеристични збир 333, онда је централни број магичног квадрата једнак 111. Тражени бројеви тада могу бити $111 - 8 = 103$, $111 - 6 = 105$, $111 - 4 = 107$, $111 - 2 = 109$, 111 , $111 + 2 = 113$, $111 + 4 = 115$, $111 + 6 = 117$ и $111 + 8 = 119$. И један од могућих магичних квадрата је:

117	103	113
107	111	115
109	119	105

123	95	115
103	111	119
107	127	99

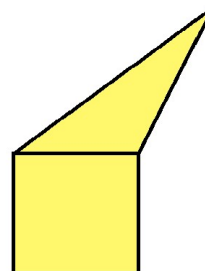
Напомена: Могућа су и друга тачна решења. На пример: $111 - 16 = 95$, $111 - 12 = 99$, $111 - 8 = 103$, $111 - 4 = 107$, 111 , $111 + 4 = 115$, $111 + 8 = 119$, $111 + 12 = 123$ и $111 + 16 = 127$. Признаје се свако тачно решење.

4. Квадрат и троугао на слици имају једнаке обиме. Колики је обим целе фигуре (жуто обојене) ако страница квадрата има дужину 6 cm?

Обим квадрата је $4 \cdot 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$.

Обим троугла је такође 24 cm, па је збир дужина две преостале стране троугла једнак $24 - 6 = 18 \text{ cm}$.

Тада је обим жуто обојене фигуре једнак $3 \cdot 6 + 18 = 18 + 18 = 36 \text{ cm}$.



5. Влада, Нада и Јагода заједно имају 124 године. Колико година има свако од њих, ако је Нада имала 11 година, када је Влада имао 13 година, а Јагода 4 године.

Ако Нада има сада x година, онда Влада има $x + 2$, а Јагода $x - 7$ година.

Тада је $x + 2 + x + x - 7 = 124$, па је $3x - 5 = 124$.

Следи да је $3x = 129$ и $x = 129 : 3 = 43$.

Дакле Влада сада има $x + 2 = 43 + 2 = 45$ годинана, Нада 43 године, а Јагода $x - 7 = 43 - 7 = 36$ година.

4. РАЗРЕД

1. Колико има четвороцифрених природних бројева чији производ цифара је 8, а збир цифара је непаран број?

Како је $1 \cdot 1 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, могуће комбинације цифара су 1, 1, 1, 8;

1, 1, 2, 4 и 1, 2, 2, 2. Прва и трећа комбинација имају непаран збир цифара, а друга паран број цифара.

Тражени бројеви су: 1118, 1181, 1811, 8111, 1222, 2122, 2212, 2221.

Дакле таквих бројева има 8.

2. Ако је $A \cdot BA \cdot BA = 2023$, колико је $AB \cdot BA$?

Број 2023 је непаран и нема парних делилаца.

Зато 2023 може бити дељив једино са 1, 3, 5, 7 и 9.

Провером се може утврдити да је $2023 : 1 = 2023$ и $2023 : 7 = 289$.

То значи да је $AB \cdot AB = 2023$ или $BA \cdot BA = 289$.

Како $A \cdot A$ никада није 3, то је једина могућност $17 \cdot 17 = 289$, па је $A = 7$ и $B = 1$.

Тражени производ је $AB \cdot BA = 17 \cdot 71 = 1207$.

3. Одреди најмањи природан број x , тако да дати квадрат постане магични.

	34	
40	x	
		37

Ако је централни број магичног квадрата x , онда је карактеристични збир $3x$.

Тада су у магичном квадрату распоређени бројеви (слика лево и слика у средини):

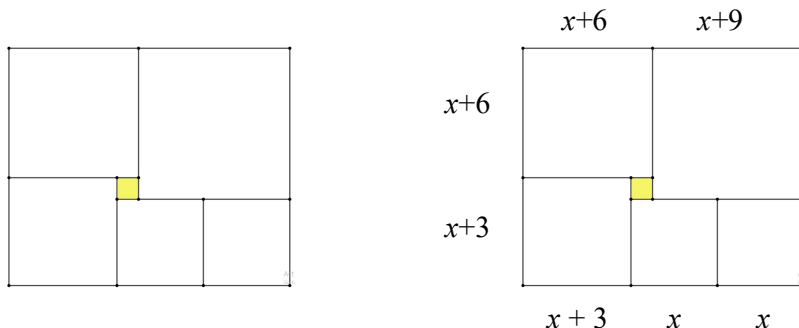
$2x-37$	34	
40	x	$2x-40$
	$2x-34$	37

$2x-37$	34	$x+3$
40	x	$2x-40$
$x-3$	$2x-34$	37

5	34	24
40	21	2
18	8	37

Како $2x - 37$, $2x - 40$, и $2x - 34$ морају бити природни, то је $x > 18$, $x > 20$ и $x > 17$, па је најмањи природан број који се може наћи у магичном квадрату једнак 21. Тада магични квадрат постаје (слика десно)

4. Правоугаоник је подељен на 6 квадрата. Одреди обим и површину правоугаоника, ако је површина обојеног квадрата једнака 9 cm^2 .



Како је површина жуто обојеног квадрата једнака 9 cm^2 , то је страница тог квадрата једнак 3 cm.

Ако је страница најмањег од преосталих квадрата једнака x , онда су странице преосталих квадрата једнаке $x + 3$, $x + 6$, $x + 9$ (види слику десно).

Са слике (десно) је јасно да је $2x - 3 = x + 9$, па је $2x - x = x = 9 + 3 = 12$.

Једна страница правоугаоника је $x + 3 + x + x = 3x + 3 = 39 \text{ cm}$, а друга страница $x + 3 + x + 6 = 2x + 9 = 33 \text{ cm}$.

Обим правоугаоника $O = 2 \cdot (39 + 33) = 2 \cdot 72 = 144 \text{ cm}$.

Површина правоугаоника је $P = 33 \cdot 39 = 1287 \text{ cm}^2$.

5. Три молера за 4 дана окрече 5 станова. Колико станова ће окречити 7 молера за 12 дана?

Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова, онда ће 3 молера за три пута више дана, тј. за 12 дана окречити 3 пута више станова, дакле $3 \cdot 5 = 15$ станова.

То значи да један молер за 12 дана окречи $15 : 3 = 5$ станова.

Дакле, 7 молера ће за 12 дана окречити $7 \cdot 5 = 35$ станова.

5. РАЗРЕД

1. Колико има двоцифрених сложенених бројева, чији је збир цифара прост број?

Збир цифара двоцифреног броја највише може бити $9 + 9 = 18$, па у обзир долазе зборови 2, 3, 5, 7, 11, 13 и 17.

Тражени сложени бројеви су 20, 12, 21, 30, 14, 32, 50, 16, 25, 34, 52, 70, 38, 56, 65, 74, 92, 49, 58, 76, 85, 94, 98. Таквих бројева је укупно 23.

2. Шта је веће $\frac{8}{2023}$ или $\frac{77}{22254}$?

Из низа неједнакости $\frac{77}{22254} < \frac{77}{22253} = \frac{7 \cdot 11}{11 \cdot 2023} = \frac{7}{2023} < \frac{8}{2023}$ следи да је $\frac{8}{2023} > \frac{77}{22254}$

3. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ су комплементни. Израчунај углове α , β и γ , ако је $\gamma + \alpha = 111^\circ$.

Како је $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $\beta + \gamma = 90^\circ$, то је $\alpha + \beta + \beta + \gamma = 270^\circ$.

Како је $2\beta + 111^\circ = 270^\circ$, то је $2\beta = 159^\circ$ и $\beta = 79^\circ 30'$.

Следи да је $\alpha = 180^\circ - \beta = 100^\circ 30'$ и $\gamma = 90^\circ - \beta = 10^\circ 30'$.

4. Дата је једначина $p \cdot q \cdot r + 3 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p = 52$.

Одреди број $A - B$, ако је A број решења дате једначине у скупу природних бројева, а B број решења дате једначине у скупу простих бројева.

Ако је $p \cdot q \cdot r + 3 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p = 52$, онда је p делилац броја 52.

Ако је $p = 1$, онд је $q \cdot r + 3 \cdot q + 2 = 52$, па је $q \cdot r + 3 \cdot q = 50$

Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 50$, па постоје 4 решења: $q = 1$, $q = 2$, $q = 5$, $q = 10$.

Ако је $p = 2$, онда је $2 \cdot q \cdot r + 6 \cdot q + 4 = 52$, па је $2 \cdot q \cdot r + 6 \cdot q = 48$.

Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 24$, па постоји 5 решења: $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$, $q = 4$ и $q = 6$.

Ако је $p = 4$, онда је $4 \cdot q \cdot r + 3 \cdot 4 \cdot q + 2 \cdot 4 = 52$, па је $4 \cdot q \cdot r + 12 \cdot q + 8 = 52$.

Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 11$, па постоји једно решење: $q = 1$.

Ако је $p = 13$, онда је $13 \cdot q \cdot r + 3 \cdot 13 \cdot q + 2 \cdot 13 = 52$, па је $q \cdot r + 3 \cdot q + 2 = 4$.

Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 2$ и нема решења.

Решења нема ни за $p = 26$ и $p = 52$.

Дакле $A = 4 + 5 + 1 = 10$.

У скупу простих бројева решење постоји само ако је $p = 2$.

Тада је $2 \cdot q \cdot r + 3 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot 2 = 52$ или $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 24$.

Ако је $q = 2$, онда је $r + 3 = 12$, па је $r = 9$, што није прост број.

Ако је $q = 3$, онда је $r + 3 = 8$ и $r = 5$ и то је једно решење.

Дакле, постоји само једно решење, па је $B = 1$, јер за $p = 13$ нема решења.

Следи да је $A - B = 10 - 1 = 9$.

5. Дат је скуп $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 2021, 2022, 2023 \}$. Постоје ли подскупови $B_1, B_2, \dots, B_7$ датог скупа A , такви да је $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_7 = A$; пресек ма која два од скупова $B_1, B_2, \dots, B_7$ је празан скуп и збир елемената у сваком од скупова $B_1, B_2, \dots, B_7$ једнак. Ако постоје, наведи један од могућих примера таквих скупова $B_1, B_2, \dots, B_7$.

Како је $1 + 2022 = 2 + 2021 = 3 + 2020 = \dots = 2023$ (1011 парова), то је збир бројева

$1, 2, 3, \dots, 2022, 2023$ једнак $1011 \cdot 2023 + 2023 = 1012 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 \cdot 1012$, могуће је да такви подскупови постоје и у сваком од седам подскупова збир бројева би био једнак $289 \cdot 1012 = 292\,468$.

Подела на подскупове има више, а једна од могућих је и:

$$B_1 = \{2023, 2022, 2021, \dots, 1873, 1874, 193\};$$

$$B_2 = \{1873, 1872, 1871, \dots, 1710, 1711, 372\};$$

$$B_3 = \{1710, 1709, 1708, \dots, 1532, 1531, 778\};$$

$$B_4 = \{1530, 1529, 1528, \dots, 1328, 1327, 1054\};$$

$$B_5 = \{1326, 1325, 1324, \dots, 1086, 1085, 737\};$$

$$B_6 = \{1084, 1083, 1082, \dots, 767, 768, 758\}; \quad \text{без бројева 1054 и 778}$$

$$B_7 = \{767, 766, 765, \dots, 2, 1\}. \quad \text{без бројева 193, 372, 737, 758.}$$

6. РАЗРЕД

1. Три молера за 4 дана окрече 5 станова. Колико станова ће окречити 7 молера за 12 дана? За колико дана ће 24 молера окречити 60 станова? Колико молера треба ангажовати да би за 12 дана окречили 45 станова?

Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова, онда је за кречење 5 станова употребљено 12 дневница, што значи да 1 молер за 1 дан окречи $5/12$ стана.

Тада 7 молера за 12 дана направе $7 \cdot 12 = 84$ дневнице и окрече $84 \cdot 5/12 = 7 \cdot 5 = 35$ станова.

Нека 24 молера за x дана окрече 60 станова. Тада је $24 \cdot x \cdot 5/12 = 60$, па је $10x = 60$.

Добија се да је број радних дана $x = 60 : 10 = 6$.

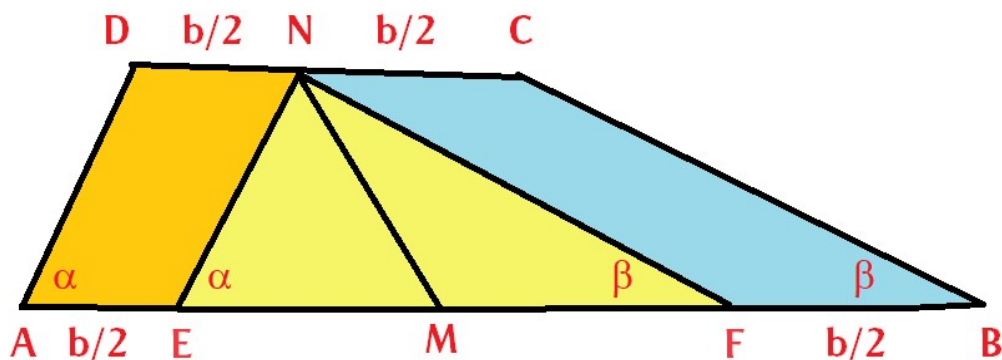
Ако у молера за 12 дана окрече 45 станова, онда је $y \cdot 12 \cdot 5/12 = 45$, па је $5y = 45$.

Добија се да је ангажовано $y = 45 : 5 = 9$ молера.

2. Дат је неједнакокраки трапез ABCD. Нека су М и N средишта основица АВ и CD трапеза и нека је дуж MN једнака полуразлици основица трапеза. Израчунај збир углова на мањој основици трапеза.

Конструишемо дужи $NE \parallel AD$ и $NF \parallel BC$.

Нека је $AB = a$ и $CD = b$.



Тада је $AM = BM = a/2$, $CN = DN = b/2$, $\angle BAD = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.

Следи да су четвороуглови AEND и BFNC паралелограми и $\angle FEN = \alpha$ и $\angle EFN = \beta$.

У троуглу ENF дуж MN је по претпоставци једнака $\frac{a-b}{2}$.

Међутим и дужио $EM = FM$ си једнаке $\frac{a-b}{2}$, па је троугао EFN правоугли.

Закључујемо да је $\alpha + \beta = 90^\circ$, па је збир углова на мањој основици $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

3. Одреди све двоцифрене бројеве који су 7 пута већи од збира својих цифара.

Нека су цифре траженог двоцифреног броја a и b .

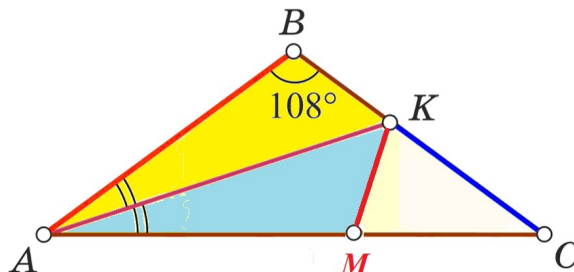
Тада је $10a + b = 7(a + b)$ и $10a + b = 7a + 7b$ или $10a - 7a = 7b - b$.

Следи да је $3a = 6b$, тј. $a = 2b$.

Број $0 < a < 10$, па је и $0 < 2b < 10$, тј. $0 < b < 5$.

То значи да постоји више таквих бројева и они су: 21, 42, 63 и 84

4. У једнакокром троуглу троуглу ABC, $AB = BC$, $\angle ABC = 108^\circ$ и симетрала угла $\angle CAB$ сече страницу BC у тачки K. Израчунај дуж AC, ако је $AB + KC = 2023$.



Како је троугао ABC једнакокром његови углови су: $\angle ABC = 108^\circ$, $\angle BCA = 36^\circ$ и $\angle CAB = 36^\circ$. Тада је $\angle BAK = \angle MAK = 18^\circ$.

Конструисамо тачку M, тако да је $AB = AM$.

Тада је $\triangle ABK \cong \triangle AMK$ (СУС: $AB = AM$, $\angle BAK = \angle MAK = 18^\circ$, $AK = AK$).

Из подударности следи да је $\angle ABK = \angle AMK = 108^\circ$, па је $\angle CMK = 72^\circ$ и $\angle CKM = 72^\circ$.

Како је троугао CMK једнакокром то је $KC = MC$,

Следи да је $AC = AM + MC = AB + KC = 2023$.

Задатак се може решити и на друге начине.

5. Бројеви од 1 до 1000 (закључно са 1000) исписани су редом по кружности. Почевши од 1 прецртавамо сваки петнаести број (1, 16, 31, 46,...) при чему при поновним обилазцима кружнице већ прецртане бројеве поново урачунавамо (прецртавамо). Колико ће бројева, на овај начин прецртавања, остати непрецртано?

У првом обиласку кружнице биће прецртани бројеви 1, 16, 31, 46, ... , 976, 991

У другом обиласку кружнице биће прецртани бројеви 6, 21, 36, 51, ... 981, 996.

У трећем обиласку кружнице биће прецртани бројеви 11, 26, 41, 56 ... 986.

У четвртном обиласку кружнице биће прецртани бројеви 1, 16, 31, 46, ... 976, 991, што значи да се прецртавање понавља и да неће бити више нових прецртаних бројева.

У првом обиласку прецртано је 67, у другом 67 и у трећем 66 бројева, што значи да је укупно прецртано $67 + 67 + 66 = 200$ бројева.

Непрецртаних ће остати $1000 - 200 = 800$ бројева.

7. РАЗРЕД

1. Збир полинома $A(x)$ и $B(x)$ је полином $2x^2 + 4x$, а њихова разлика је 6.

а) Одреди полином $A(x) \cdot B(x)$.

б) Реши једначину $A(x) \cdot B(x) = 0$.

Ако је $A(x) + B(x) = 2x^2 + 4x$ и $A(x) - B(x) = 6$, онда је $2A(x) = 2x^2 + 4x + 6$.

Следи да је $A(x) = x^2 + 2x + 3$, па је $B(x) = A(x) - 6 = x^2 + 2x - 3$.

Тада је $A(x) \cdot B(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) = (x^2 + 2x)^2 - 3^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$.

Једначина $A(x) \cdot B(x) = 0$, постаје $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) = 0$.

Како је $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$, једначина $x^2 + 2x + 3 = 0$ нема реалних решења.

Из $x^2 + 2x - 3 = 0$, добија се да је $x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$ или $(x + 1)^2 - 2^2 = 0$.

То значи да је $(x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1) = 0$, па су једина решења једначине

$A(x) \cdot B(x) = 0$, реални бројеви 1 и -3.

2. Полупречник кружнице описане око правилног осмоугла је 8 cm. Израчунај површину правилног осмоугла.

Ако посматрамо два спојена троугла карактеристична за правилни осмоаго, јасно је да они чине делтоид са једним правим углом и једном дијагоналом једнаком r , а другом $r\sqrt{2}$.

Таквих делтоида има 4, па је површина $4 \cdot r \cdot r\sqrt{2} / 2 = 2 \cdot 8 \cdot 8 \sqrt{2} = 128\sqrt{2}$.

3. У дувачком оркестру музичари су на паради били постројени у квадратном облику (n редова са по n музичара). Потом се оркестар у истом саставу престројио у правоугаону конфигурацију, тако што је повећан број редова за 5, а у сваком реду је опет био једнак број музичара. Одреди колико је музичара било у том оркестру и како је изгледала формација оркестра пре и после престројавања.

Нека је број музичара у једном реду у другој формацији једнак m . Тада је $n^2 = (n + 5)m$.

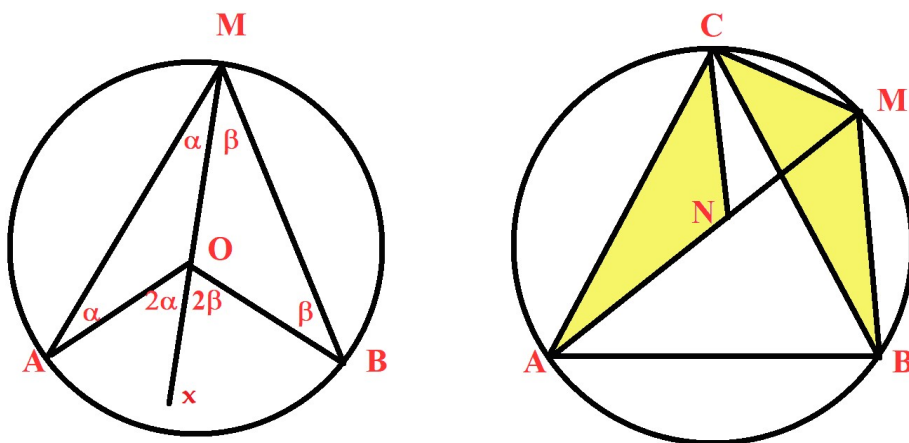
Следи да је $m = \frac{n^2}{n + 5}$ што значи да је број n^2 дељив са $n + 5$.

Како је $m = \frac{n^2}{n+5} = \frac{n^2 + 5n - 5n + 25 - 25}{n+5} = n - 5 - \frac{25}{n+5}$, то се $n+5$ садржи у 25.

То значи да је $(n+5) \in \{1, 5, 25\}$, а $n \in \{-4, 0, 20\}$. Како n мора бити природан број то је $n = 20$ и број музичара је 400.

У првој формацији је било 20 редова по 20 музичара, а у другој 25 редова по 16 музичара.

4. Дат је једнакостранични троугао ABC и на луку BC кружнице описане око троугла тачка M. Докажи да је $AM = BM + CM$.



Нека је O центар кружнице описане око једнакостраничног троугла ABC (слика лево).

Ако је $\angle AMO = \alpha$ и $\angle BMO = 2\beta$, онда су и углови $\angle MAO = \alpha$ и $\angle MBO = \beta$.

Тада је $\angle AOX = 2\alpha$ и $\angle BOX = 2\beta$, а $\angle AOB = 2\alpha + 2\beta$.

Како је $\angle AOB = 120^\circ$, то је $\angle AMB = 60^\circ$.

На сличан начин се може доказати и да је $\angle AMC = 60^\circ$.

Из претходног доказа следи и да је $\angle MAC = \angle MBC = 1/2 \angle COM$.

Нека је N тачка дужи AM, таква да је $MN = MC$.

Како је $\angle NMC = 60^\circ$, то је троугао MNC једнакостранични и $MN = MC = NC$.

Сада су троуглови ANC и BMC подударни (СУС: $AC = BC$, $\angle MAC = \angle MBC$, $CN = CM$), па је из подударности $AN = BM$.

Како је $AM = AN + NM = BM + CM$ то еј доказ завршен.

5. Паук се креће по прозорској решетки која је у облику квадратне мреже димензија 4 x 4. Паук полази из левог доњег угла решетке и кретање паука је праволинијско, корак по корак, од чвора до чвора решетке, али увек десно или горе, при чему је циљ да ухвати муву која се налази у десном горњем углу решетке.
- Колико најмање корака треба пауку до циља ?
 - На колико различитих начина може паук стићи до муве ?

A 4x4 grid illustrating the calculation of the binomial coefficient $C(7, 4) = 35$. The grid is filled with yellow cells. The top row contains the values 1, 5, 15, 35, 70. The rightmost column contains the values 1, 4, 10, 20, 35. The bottom row contains the values 1, 1, 1, 1. The leftmost column contains the values 1, 1, 1, 1. The grid is labeled with 'P' on the left and 'M' on the right.

- а) Најмањи (а и највећи) број корака је 8, јер се паук креће увек десно и увек горе.
- б) У свакој тачки (чвору) квадратне мреже уписан је број начина на који паук може да дође до тог чвора. Сабирањем могућности за сваки чвор добија се да паук до муве може стићи на 70 начина.

8. РАЗРЕД

1. Коцка чија је ивица 10 cm пресечена је са равни која је од три ивице са заједничким теменом А одсеца дужи АМ, АN и АР једнаке дужине. Ако је однос запремина добијених делова коцке $371 : 4$, одредити разлику површина тих делова.

Нека је $AM = AN = AP = a$, Запремина коцке је $10^3 = 1000 \text{ cm}^3$, а запремина пирамиде $AMNP$ је $a/3 \cdot a^2/2 = a^3/6$.

Запремине добијених тела су $1000 - a^3/6$ и $a^3/6$, па је $(1000 - a^3/6) : a^3/6 = 371 : 4$ или $4000 - 4a^3/6 = 371a^3/6$.

Следи да је $375a^3/6 = 4000$, па је $a^3 = 24000/375 = 64$, што значи да је $a = 4$ cm.

Површина већег дела је $6 \cdot 100 - M + B$, а површина пирамиде је $M + B$.

Разлика ових површина је $600 - M + B - M - B = 600 - 2M = 600 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4/2 = 600 - 48 = 552 \text{ cm}^2$.

2. На столу се налазе математичке књиге, Срђан је узео трећину књига и још једну књигу. Влада је узео трећину преосталих књига и још две књиге. Пера је узео трећину преосталих књига и још три књиге. Бојан је узео трећину преосталих књига и још четири књиге. На столи је остало још 10 књига. Колико књига је било на столу и колико књига је узео сваки од математичара?

Прво решење:

Ако се на 10 књига додају 4 књиге које је Бојан узео, добија се $10 + 4 = 14$ књига које су $2/3$ од претходног броја књига. Дакле Бојану је на располагању била $3 \cdot 7 = 21$ књига.

Ако се на 21 додају 3 књиге које је узео Пера, добија се $21 + 3 = 24$ књиге, што је $\frac{2}{3}$ књига

које су биле Пери на располагању. То значи да је Пера на располагању имао $3 \cdot 12 = 36$ књига. Ако се на 36 књига додају 2 књиге које је узео Влада, добија се $36 + 2 = 38$ књига које су $2/3$ од претходног броја књига. Дакле Влади је на располагању било $3 \cdot 19 = 57$ књига. На крају, када се на 57 књига дода 1 књига коју је узео Срђан, добија се $57 + 1 = 58$ књига, што је $2/3$ књига које биле Срђану на располагању. То значи да је на столу било $3 \cdot 29 = 87$ књига.

Срђан је добио $87 : 3 + 1 = 29 + 1 = 30$ књига.

Влада је добио $(87 - 30) : 3 + 2 = 57 : 3 + 2 = 19 + 2 = 21$ књига.

Пера је добио $(87 - 30 - 21) : 3 + 3 = 36 : 3 + 3 = 12 + 3 = 15$ књига.

Бојан је добио $(87 - 30 - 21 - 15) : 3 + 4 = 21 : 3 + 4 = 7 + 4 = 11$ књига.

На столу је остало $87 - 30 - 21 - 15 - 11 = 10$ књига.

Друго решење:

Нека је на столу било $3x$ књига, јер да би се израчунала трећина на столу увек мора остати број књига који је дељив са 3.

Срђан је узео $x + 1$ књигу, па је на столу остало $2x - 1 = 3y$ књига.

Влада је узео $y + 2$ књиге па је на столу остало $2y - 2 = 3z$ књига.

Пера је узео $z + 3$ књига, па је на столу остало $2z - 3 = 3t$ књига.

Бојан је узео $t + 4$ књиге, па је на столу остало $2t - 4 = 10$ књига.

Следи да је $2t = 14$, па је $t = 7$. Следи да је $2z - 3 = 3t = 21$ и $2z = 24$, а $z = 12$.

Тада је $2y - 2 = 3z$, па је $2y - 2 = 36$, $2y = 38$ и $y = 19$.

Следи да је $2x - 1 = 3y = 57$, па је $2x = 58$ и $x = 29$.

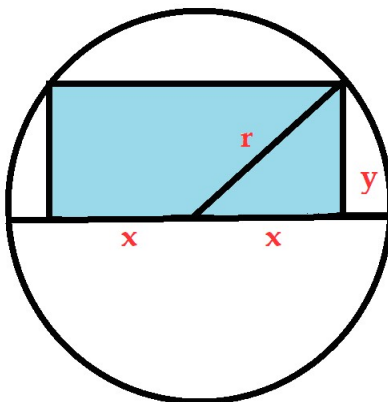
Према томе на столу је било $3x = 3 \cdot 29 = 87$ књига,

3. У полукруг полупречника r уписан је правоугаоник, чија су два темена на пречнику круга а друга два на кружности. Одреди обим правоугаоника који има највећу површину.

Ако су странице траженог правоугаоника $2x$ и y , његова површина $P = 2x \cdot y$.

Из Питагорине теореме је $x^2 + y^2 = r^2$, па је $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Површина траженог правоугаоника је $P = 2x \cdot y = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$



Из неједнакости аритметичке и геометријске средине добија се да је

$$P = 2x \cdot y = 2x\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{x^2(r^2 - x^2)} \leq x^2 + r^2 - x^2 = r^2.$$

Највећа површина се добија када је $x^2 = r^2 - x^2$, тј. $2x^2 = r^2$ и $x = r\sqrt{2}/2$.

$$\text{Тада је } y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Обим правоугаоника највеће површине је $O = 4x + 2y = 3r\sqrt{2}$.

4. Збир цифара броја 7^{2023} је a . Збир цифара броја a једнак је броју b , а збир цифара броја b једнак је броју c . Одредити број c .

Ако је $S(7^{2023}) = a$ и $S(a) = b$ и $S(b) = c$, онда је $7^{2023} \equiv S(7^{2023}) \equiv a \equiv S(a) \equiv b \equiv S(b) \equiv c \pmod{9}$.

Број $7^{2023} \equiv (7^3)^{671} \cdot 7 \equiv 343^{671} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{9}$, а то значи да је и $a \equiv b \equiv c \equiv 7 \pmod{9}$.

Број $7^{2023} < 10^{2023} < 999 \dots 999$ (2023 деветке).

То значи да је број a који представља збир цифара броја 7^{2023} мањи од $2023 \cdot 9 = 18\,207$.

Како је $a < 18\,207$, то је збир цифара броја a , а то је $b < S(18\,199) = 1 + 8 + 1 + 9 + 9 \leq 28$.

Тада је број c који представља збир цифара броја b и мањи или једнак 10.

Како је $c \equiv 7 \pmod{9}$ и $c \leq 10$, то је $c = 7$.

5. Одредити све троцифрене бројеве $\overline{abc}$, чије су све цифре различите од нуле, ако за његове цифре a , b и c важи једнакост $a + b + c = 9$ и неједнакост $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6abc \leq a^3 + b^3 + c^3$.

Из неједнакости $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6abc \leq a^3 + b^3 + c^3$ следи да је

$$9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - a^3 + b^3 + c^3 \leq 6abc \text{ или } a^2(9-a) + b^2(9-b) + c^2(9-c) \leq 6abc.$$

Тада је због једнакости $a + b + c = 9$, $a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \leq 6abc$.

Када се последња неједнакост подели са abc добија се неједнакост

$$\frac{a^2(b+c)}{abc} + \frac{b^2(a+c)}{abc} + \frac{c^2(a+b)}{abc} \leq 6 \text{ или } \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \leq 6.$$

$$\text{Следи да је } \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq 6.$$

Како је у претходној неједнакости израз у свакој од заграда већи или једнак 2, то је неједнакост могућа једино ако важи једнакост, тј. ако је $a = b = c = 3$.

То значи да је једини троцифрен број који испуњава дате услове број 333.