

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

Диофант



ДИОФАНТОВА
МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

ПРОБНО
ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ

ВАЉЕВО, 03.12.2023.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

3. РАЗРЕД

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ
03. 12. 2023.

- У броју 48157036, не мењајући редослед цифара, прецртај пет цифара тако да добијеш
а) најмањи могући троцифрен број;
б) највећи могући троцифрен број.
Израчунај збир и разлику добијених бројева.
- Од палидрваца је састављена нетачна „једнакост“:

Премести само једно палидрвце тако да се добије тачна једнакост.
Одреди бар два решења датог проблема.
- Користећи пет цифара 6, симболе рачунских операција и заграде напиши пет израза чије су вредности 1, 2, 3, 4 и 5.
- Број А једнак је збиру два најмања парна броја треће стотине.
Број В једнак је збиру два највећа непарна броја друге стотине.
Израчунај збир и разлику бројева А и В.
- Напиши све троцифрене бројева чији је производ цифара једнак 12?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2023/24

4. РАЗРЕД

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 03. 12. 2023.

1. Марко је заспао 2. децембра 2023. године у 22 часа и 13 минута, а пробудио се 3. децембра 2023. године у 7 часова и 27 минута. Колико часова и колико минута је спавао Марко?
2. Да ли је више парних четвороцифрених бројева чији је производ цифара једнак 8, или је више троцифрених непарних бројева чији је збир цифара једнак 6?
3. Квадрат чија страница има дужину 60 cm, подељен је на шест једнаких (подударних) правоугаоника. Одреди обим тог правоугаоника. Колико има различитих решења?
4. У кутији се налазе кликери. Када је Милан узео једну трећину кликера, а Драган две шестине кликера у кутији је остало 30 кликера. Колико кликера је узео Милан, а колико Драган? Образложи или графички прикажи решење проблема.
5. Дата је кружница k која има центар O и полупречник 3 cm. Нацртај кружницу и на кружници изабери тачке A и B тако да дуж AB има дужину 4 cm. Нацртај праву a која садржи центар кружнице и тачку A и праву b која садржи центар кружнице и тачку B . Пресек праве a и кружнице је тачка C .
 - а) Нацртај одговарајућу слику.
 - б) Израчунај дужину дужи AC и дужину дужи BO .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ
03. 12. 2023.

1. Дати су скупови: $A = \{ x \mid x \text{ је сложен број мањи од } 25 \}$;
 $B = \{ y \mid y \text{ је прост број мањи од } 25 \}$;
 $C = \{ z \mid z \text{ је природан број дељив са } 3 \text{ и мањи од } 25 \}$.
Одреди скупове: а) A, B, C ; б) $(A \cup B) \cap C$; в) $(A \setminus C) \cap B$.
2. Дрвена коцка чија је површина 150 cm^2 прво је офарбана плавом бојом, а потом је исечена на коцкице чија је ивица 1 cm (кубне центриметре).
а) Колико има коцкица чије су три стране офарбане плавом бојом?
б) Колико има коцкица чије су само две стране офарбане плавом бојом?
в) Колико има коцкица чије све стране су неофарбане?
3. Одреди све природне бројеве који су дељиви са 8, чији је збир цифара 7, а производ цифара 6?
4. Велика чоколада има 72 „коцкице“. Ирена је појела једну трећину чоколаде, а Анета једну половину чоколаде.
а) Колико коцкица је остало за Валентину?
б) Који део чоколаде је остао за Валентину?
5. Мира је записала најмањи, а Весна највећи четвороцифрени број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 даје остатак 1. Да ли је разлика та два броја дељива са 720?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ
03. 12. 2023.

1. Упореди бројеве А и В, ако је $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot 100$ и $B = (1,25 - 0,4 \cdot 2,5) : \frac{1}{396}$.
2. Нина и Лена имају укупно 1 200 динара. Колико новца има свака од њих, ако је половина новаца који има Нина једнака трећини новца који има Лена?
3. Колико најмање, а колико највише узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 2023?
4. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C. Симетрала правог угла и симетрала $\angle ABC$ секу се под углом од 113° . Упореди странице АВ, ВС и СА тог троугла.
5. Дат је неједнакостранични троугао ABC ($AB > BC > CA$). На краку ВС одреди (нацртај) тачку М, тако да је $AM = BM$. Образложи решење.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ
03. 12. 2023.

1. Телевизор је коштао 50 000 динара. У току манифестације „Црни петак“ његова цена је смањена за 10%. Јуче је, у оквиру новогодишњег базара, новоформирана цена телевизора смањена за још 20%.
 - а) Колико сада кошта тај телевизор?
 - б) Да ли је укупно смањење цене телевизора веће, мање или једнако 30%? Образложи одговор.
2. У координатној xOy равни дате су тачке $A(2, 0)$, $B(6,2)$, $C(4, 8)$ и $D(0, 4)$. Одреди површину четвороугла $ABCD$?
3. Докажи да је $45 < \sqrt{2023} + \sqrt{2024} < 46$.
4. За природне бројеве a , b и c важе једнакости: $a : b = 3 : 4$ и $b : c = 4 : 5$.
 - а) Израчунај $a : c$.
 - б) Колики је најмањи могући збир природних бројева a , b и c ?
5. Познато је да су бројеви 2003, 2011, 2017, 2027, 2029 ... прости бројеви већи од 2000.
 - а) Докажи да се број 2023 не може приказати као збир два проста броја.
 - б) Колико најмање, а колико највише простих бројева треба сабрати да би њихов збир био 2023?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ
03. 12. 2023.

1. Катете правоуглог троугла ABC имају дужину 15 cm и 20 cm. Израчунај површину троуглова на које хипотенузина висина дели дати правоугли троугао.
2. Реши једначину: $\frac{x+3}{2} - \frac{x+5}{3} = \frac{x+4}{5} - \frac{4x+2}{6}$.
3. Дата је коцка ABCDA₁B₁C₁D₁. Ивице AB и CC₁ представљају један пар мимоилазних ивица коцке. Колико има парова мимоилазних ивица коцке? (Напомена: пар AB и CC₁ и пар CC₁ и AB представљају један исти пар).
4. У круг је уписан делтоид чије две странице имају дужину 10 cm и 24 cm.
а) Докажи да се у дати делтоид (а и сваки делтоид) може уписати круг.
б) За колико се разликују полупречник круга описаног око делтоида и полупречник круга уписаног у делтоид?
5. Одреди све реалне бројеве x такве да је $||x - 2024| - 2023| = 2022$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ

03. 12. 2023.

РЕШЕЊА

3. РАЗРЕД

1. У броју 48157036, не мењајући редослед цифара, прецртај пет цифара тако да добијеш
- а) најмањи могући троцифрен број;
 - б) највећи могући троцифрен број.
- Израчунај збир и разлику добијених бројева.

а) 103; б) 876.

Збир бројева је $103 + 876 = 979$, а разлика $876 - 103 = 773$.

2. Од палидрваца је састављена нетачна „једнакост“:



Премести само једно палидрвце тако да се добије тачна једнакост.

Одреди бар два решења датог проблема.

Нека од могућих решења су:

$$VII + V = XII$$

$$VII + IV = XI.$$

3. Користећи пет цифара 6, симболе рачунских операција и заграде напиши пет израза чије су вредности 1, 2, 3, 4 и 5.

Једно од могућих решења је:

$$6 : 6 + (6 - 6) : 6 = 1$$

$$6 - 6 + (6 + 6) : 6 = 2$$

$$6 - (6 + 6 + 6) : 6 = 3$$

$$6 - 6 : 6 - 6 : 6 = 4$$

$$6 - 6 : 6 + 6 - 6 = 5$$

4. Број А једнак је збиру два најмања парна броја треће стотине.
Број В једнак је збиру два највећа непарна броја друге стотине.
Израчунај збир и разлику бројева А и В.

$$A = 202 + 204 = 406 \text{ и } B = 197 + 199 = 396$$

$$A + B = 406 + 396 = 802, \quad A - B = 406 - 396 = 10.$$

5. Напиши све троцифрене бројева чији је производ цифара једнак 12?

Производ цифара је 12 у случајевима да су вцифре: 1, 2, 6; 1, 3, 4; 2, 2, 3.

Тражени бројеви су: 126, 162, 216, 261, 612, 621; 134, 143, 314, 341, 413, 431; 223, 232, 322.

Таквих бројева има $6 + 6 + 3 = 15$.

4. РАЗРЕД

1. Марко је заспао 2. децембра 2023. године у 22 часа и 13 минута, а пробудио се 3. децембра 2023. године у 7 часова и 27 минута. Колико часова и колико минута је спавао Марко?

До поноћи Марко је спавао $24:00 - 22:13 = 1:47$.

Од поноћи још 7:27.

То је укупно $1:47 + 7:27 = 8:74 = 9:14$ минута.

2. Да ли је више парних четвороцифрених бројева чији је производ цифара једнак 8, или је више троцифрених непарних бројева чији је збир цифара једнак 6?

Ако је производ цифара 8, онда су могући случајеви: $1 \cdot 1 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Четвороцифрени парни бројеви написаних тим цифрама су: 1142, 1412, 4112, 1222, 2122, 2212 (завршавају се 2); 1124, 1214, 2114 (завршавају се 4); 1118 (завршавају се 8) и има их $6 + 3 + 1 = 10$.

Ако је збир цифара 6, онда су могући случајеви: 1, 0, 5; 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 0, 4; 2, 2, 2;

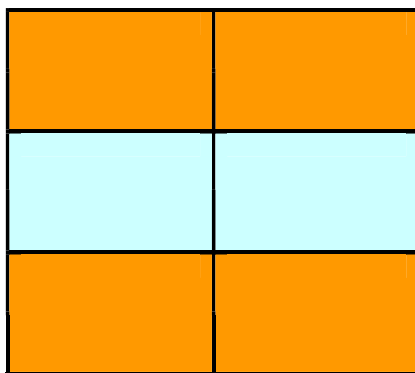
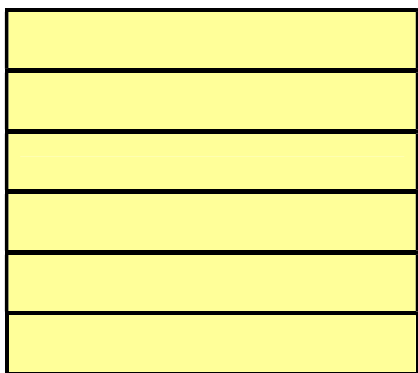
3, 0, 3. Таквих непарних бројева има: 141, 231, 321, 411, 501 (завршавају се на 1);

123, 213, 303 (завршавају се на 3); 105 (завршавају се на 5). Укупно их има $5 + 3 + 1 = 9$.

Дакле више је парних четвороцифрених чији је производ цифара 8, него непарних троцифрених чије збир цифара једнак 6.

3. Квадрат чија страница има дужину 60 см, подељен је на шест једнаких (подударних) правоугаоника. Одреди обим тог правоугаоника. Колико има различитих решења?

Могућа су два случаја – решења (види наредну слику)



У првом случају квадрат је подељен на 6 правоугаоника чије су димензије 60 cm x 10 cm, а у другом на 6 правоугаоника чије су димензије 20 cm x 30 cm.

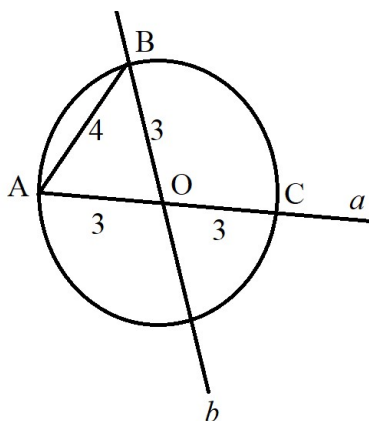
Обим првог правоугаоника је $60 + 10 + 60 + 10 = 140$ cm.

Обим другог правоугаоника је $20 + 30 + 20 + 30 = 100$ cm.

4. У кутији се налазе кликери. Када је Милан узео једну трећину кликера, а Драган две шестине кликера у кутији је остало 30 кликера. Колико кликера је узео Милан, а колико Драган? Образложи или графички прикажи решење проблема.

Милан је узео једну трећину кликера. Драган две шестине кликера, што је такође једна трећина (на претходној слици десно види квадрат подељен на шест једнаких делова), па је остала само једна трећина кликера и то је 30. Дакле у кутији је било $3 \cdot 30 = 90$ кликера. Милан је узео трећину, дакле $90 : 3 = 30$. Драган је узео две шестине, дакле $2 \cdot (90 : 6) = 30$ кликера.

5. Дата је кружница k која има центар O и полупречник 3 cm. Нацртај кружницу и на кружници изабери тачке A и B тако да дуж AB има дужину 4 cm. Нацртај праву a која садржи центар кружнице и тачку A и праву b која садржи центар кружнице и тачку B . Пресек праве a и кружнице је тачка C .
- а) Нацртај одговарајућу слику.
- б) Израчунај дужину дужи AC и дужину дужи BO .



Дужина дужи AC (пречник) је $3 + 3 = 6$ cm, а дужина дужи BO (полупречник) је 3 cm.

5. РАЗРЕД

1. Дати су скупови: $A = \{ x \mid x \text{ је сложен број мањи од } 25 \}$;
 $B = \{ y \mid y \text{ је прост број мањи од } 25 \}$;
 $C = \{ z \mid z \text{ је природан број дељив са } 3 \text{ и мањи од } 25 \}$.
Одреди скупове: а) A, B, C ; б) $(A \cup B) \cap C$; в) $(A \setminus C) \cap B$.

а) $A = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24 \}$;
 $B = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \}$;
 $C = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 \}$.
б) $(A \cup B) \cap C = C = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 \}$.
в) $(A \setminus C) \cap B = \{ 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22 \} \cap B = \emptyset$.

2. Дрвена коцка чија је површина 150 cm^2 прво је офарбана плавом бојом, а потом је исечена на коцкице чија је ивица 1 cm (кубне центриметре).
а) Колико има коцкица чије су три стране офарбане плавом бојом?
б) Колико има коцкица чије су само две стране офарбане плавом бојом?
в) Колико има коцкица чије све стране су неофарбане?

Површина коцке је $6 \cdot a \cdot a = 150 \text{ cm}^2$, па је $a \cdot a = 150 : 6 = 25$ и $a = 5 \text{ cm}$.
Запремина коцке је $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \text{ cm}^3$, па има укупно 125 коцкица.
а) Са три стране су обојене само коцкице у врховима (теменима) коцке и њих има 8.
б) Са две стране су обијене коцкице које су на ивицама коцке (а нису врхови), а њих на свакој ивици коцке има 3, па их је укупно $12 \cdot 3 = 36$.
в) Коцкица које су обојене само са једне стране има $3 \cdot 3 = 9$ на свакој страни коцке, што је укупно $6 \cdot 9 = 54$ коцкице. Необојених коцкица има $125 - 8 - 36 - 54 = 27$. Исти број коцкица се добија и када се у обзир узме да унутрашњост коцке (мања коцка ивице 3 cm) запремине $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ коцкица није имало додир са бојом.

3. Одреди све природне бројеве који су дељиви са 8, чији је збир цифара 7, а производ цифара 6?

Једноцифрених бројева који су дељиви са 8, а са збиром цифара 7 нема.

Двоцифрених бројева који имају производ цифара 6 има само 4 и то су 16, 23, 32 и 61. Збир цифара 7 и дељивост са 8 поседује само број 16 и он је једно од решења.

Троцифрени бројеви чији је производ цифара 6 имају цифре 1, 1 и 6 или 1, 2, 3. Први ће имати збир цифара 8, а други збир цифара 6 и оба збира су различита од 7, па таквих бројева нема.

Четвороцифрених бројева чији је производ цифара 6, а збир цифара 7 има само у комбинацији 1, 1, 2, 3, јер код 1, 1, 1, 6 збир цифара је 9. Због дељивости са 8 у обзир долазе само бројеви који се завршавају цифром 2, а то су 1132, 1312 и 3112. Са 8 су дељиви бројеви 1312 и 3112.

Ако број има пет или више цифара, онда је збир његових цифара већи или једнак $1 + 1 + 1 + 1 + 6 = 10$ или од $1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8$, па бројева који одговарају условима задатка више нема.

Једина решења проблема су бројеви: 16, 1312, 3112.

4. Велика чоколада има 72 „коцкице“. Ирена је појела једну трећину чоколаде, а Анета једну половину чоколаде.

- а) Колико „коцкица“ је остало за Валентину?
б) Који део „чоколаде“ је остао за Валентину?

Ирена је појела $72 : 3 = 24$ коцкице, а Анета је појела $72 : 2 = 36$ коцкица.

То је укупно $36 + 24 = 60$ коцкица па је за Валентну остало $72 - 60 = 12$ коцкица чоколаде.

Како је $72 : 12 = 6$, Валентина је појела шестину чоколаде.

5. Мира је записала најмањи, а Весна највећи четвороцифрени број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 даје остатак 1. Да ли је разлика та два броја дељива са 720?

Број који је дељив са 2, 3, 4, 5 и 6 је број који је у суштини дељив са њиховим НЗС, а то је број $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$. Како тражени бројеви морају при дељењу са 60 давати остатак 1, то је најмањи четвороцифрени такав број $960 + 60 + 1 = 1021$, а највећи $9960 + 1 = 9961$.

Њихова разлика је $9961 - 1021 = 8940$ и дељива је са 60, али није са 720.

6. РАЗРЕД

1. Упореди бројеве А и В, ако је $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot 100$ и $B = (1,25 - 0,4 \cdot 2,5) : \frac{1}{396}$.

$$\text{Израз } A = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot 100 = \left(\frac{1}{2} + \frac{18}{20} \right) \cdot 100 = \left(\frac{5}{10} + \frac{9}{10} \right) \cdot 100 = \frac{14}{10} \cdot 100 = 140.$$

$$\text{Израз } B = (1,25 - 0,4 \cdot 2,5) : \frac{1}{396} = (1,25 - 1) \cdot 396 = 0,25 \cdot 396 = 396 : 4 = 99.$$

Како је $140 > 99$, то је и $A > B$.

2. Нина и Лена имају укупно 1 200 динара. Колико новца има свака од њих, ако је половина новаца који има Нина једнака трећини новца који има Лена?

Ако је половина новца који има Нина једнака x , онда је трећина новца који има Лена такође x . То значи Нина има $2x$, а Лена $3x$ динара. Као је $2x + 3x = 5x = 1200$ динара, то је $x = 1200 : 5 = 240$ динара. Дакле Нина има $2x = 2 \cdot 240 = 480$, а Лена $3x = 3 \cdot 240 = 720$ динара.

3. Колико најмање, а колико највише узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 2023?

Најмање 2, и то је збир $1011 + 1012 = 2023$.

А највише сабирака има ако се ради о збиру

$$(-2022) + (-2021) + \dots + 2021 + 2022 + 2023 = 2023.$$

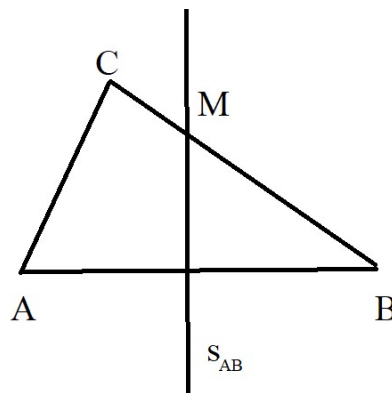
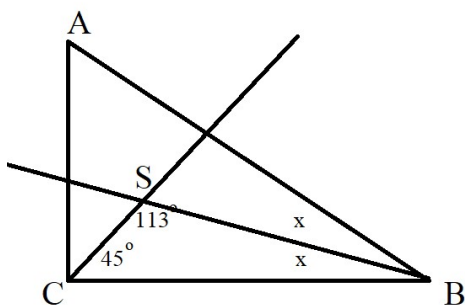
Тада има 2022 негативна броја, нула, 2022 позитивна броја и број 2023, што значи да сабирака има $2022 + 2022 + 1 + 1 = 4044 + 2 = 4046$.

4. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C. Симетрала правог угла и симетрала $\angle ABC$ секу се под углом од 113° . Упореди странице AB, BC и CA тог троугла.

Из троугла BCS јасно је да је $45^\circ + 113^\circ + x = 180^\circ$. Тада је $x = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$.

Следи да је $\angle ABC = 22^\circ + 22^\circ = 44^\circ$ и $\angle BAC = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$ (слика лево)

Како је $\angle ACB = 90^\circ > \angle BAC = 46^\circ > \angle ABC = 44^\circ$, то је и $AB > BC > AC$.



5. Дат је неједнакостранични троугао ABC ($AB > BC > CA$). На краку BC одреди (нацртај) тачку M, тако да је $AM = BM$. Образложи решење.

Из услова задатка је $AM = BM$, то се тачка M налази на симетрали дужи AB (слика десно).

Како је M и на дужи BC, то је M тачка пресека симетрале дужи AB и дужи BC.

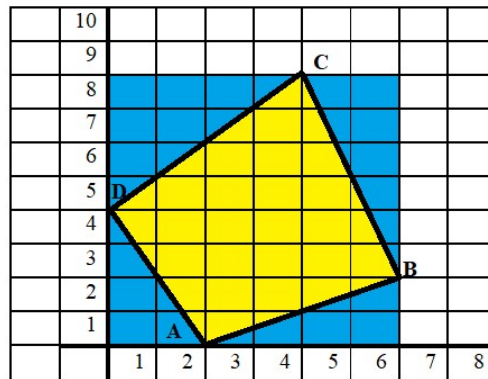
7. РАЗРЕД

- Телевизор је коштао 50 000 динара. У току манифестације „Црни петак“ његова цена је смањена за 10%. Јуче је, у оквиру новогодишњег базара, новоформирана цена телевизора смањена за још 20%.
 - Колико сада кошта тај телевизор?
 - Да ли је укупно смањење цене телевизора веће, мање или једнако 30%? Образложи одговор.

а) Цена телевизора у току манифестације „црни петак“ је била $50\,000 \cdot (1 - 10\%) = 50\,000 \cdot 0,9 = 45\,000$ динара. После смањења за 20%, нова цена је била $45\,000 (1 - 20\%) = 45\,000 \cdot 0,8 = 36\,000$ динара.

б) Укупно смањење цене телевизора је $50\,000 - 36\,000 = 14\,000$, што износи $14\,000 : 50\,000 = 28\,000 : 100\,000 = 0,28 = 28\%$.

- У координатној xOy равни дате су тачке $A(2, 0)$, $B(6,2)$, $C(4, 8)$ и $D(0, 4)$. Одреди површину четвороугла $ABCD$?



Површина траженог четвороугла се добија када се од површине правоугаоника чије су странице 6 и 8 одузму површине (плавих) троуглова које су једнаке: $4 \cdot 2 : 2 = 4$, $6 \cdot 2 : 2 = 6$, $4 \cdot 4 : 2 = 8$ и $4 \cdot 2 : 2 = 4$. Површина четвороугла је $48 - 4 - 6 - 8 - 4 = 48 - 22 = 26$.

- Докажи да је $45 < \sqrt{2023} + \sqrt{2024} < 46$.

Како је $44^2 = 1936 < 2024 < 2025 = 45^2$, то је $44 < \sqrt{2024} < 45$.

Тада је $2067 = 2023 + 44 < 2023 + \sqrt{2024} < 2023 + 45 = 2068$ и

$45^2 = 2025 < 2067 < 2023 + \sqrt{2024} < 2068 < 2116 = 46^2$.

Следи да је $45 = \sqrt{2025} < \sqrt{2067} < \sqrt{2023 + \sqrt{2024}} < \sqrt{2028} < \sqrt{2116} = 46$

4. За природне бројеве a , b и c важе једнакости: $a : b = 3 : 4$ и $b : c = 4 : 5$.

а) Израчунај $a : c$.

б) Колики је најмањи могући збир природних бројева a , b и c ?

а) Како је $a : b = 3 : 4$ и $b : c = 4 : 5$, то је $a : b : c = 3 : 4 : 5$, па је $a : c = 3 : 5$.

б) Најмањи могући збир бројева је $3 + 4 + 5 = 12$.

Напомена; У овом задатку се догодила грешка у куцању и задатак је постао сасвим једноставан. Наша намера је била да задатак гласи:

За природне бројеве a , b и c важе једнакости: $a : b = 3 : 4$ и $b : c = 5 : 6$.

а) Израчунај $a : c$.

б) Колики је најмањи могући збир природних бројева a , b и c ?

Решење:

а) Како је $a : b = 3 : 4$ и $b : c = 5 : 6$, то је $a : b = 3 : 4 = 15 : 20$ (проширивање са 5) и $b : c = 5 : 6 = 20 : 24$ (проширивање са 4).

Тада је $a : b : c = 15 : 20 : 24$, па је $a : c = 15 : 24 = 5 : 8$.

б) Најмањи могући збир природних бројева a , b и c је $15 + 20 + 24 = 59$.

5. Познато је да су бројеви 2003, 2011, 2017, 2027, 2029 ... прости бројеви већи од 2000.

а) Докажи да се број 2023 не може приказати као збир два проста броја.

б) Колико најмање, а колико највише простих бројева треба сабрати да би њихов збир био 2023?

а) Број 2023 је непаран и може бити само збир једног парног простог броја (а једини такав је 2) и једног непарног простог броја p . Како је $2 + p = 2023$, то је $p = 2021$. Број 2021 није прост, јер је $43 \cdot 47 = 2021$, па се 2023 не може представити као збир два проста броја.

б) Како је $2023 = 2017 + 6 = 2017 + 3 + 3$, то за збир 2023 требају најмање три проста броја (напомена: они нису једини, јер је и $5 + 7 + 2011 = 2023$, $3 + 17 + 2003 = 2023$...).

Из $2023 = 2020 + 3 = 2 + 2 + \dots + 2 + 3$ (1010 двојки и једна тројка), следи да треба сабрати највише $1010 + 1 = 1011$ простих бројева.

8. РАЗРЕД

1. Катете правоуглог троугла ABC имају дужину 15 cm и 20 cm. Израчунај површину троуглова на које хипотенузина висина дели дати правоугли троугао.

Ако је М тачка у којој хипотенузина висина пресеца хипотенузу, онда су троуглови ABC, ASM и BCM слични, па се површине добијених троуглова односе као квадрати одговарајућих страница (на пример хипотенуза). Како је површина троугла ABC једнака 150, а хипотенуза једнака 25 cm, то се странице односе као $15 : 20 : 25 = 3 : 4 : 5$, то ће се површине односити као $9 : 16 : 25$ и биће $9 \cdot 6 = 54 \text{ cm}^2$, $16 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$ и $25 \cdot 6 = 150 \text{ cm}^2$.

Друго решење: Нека је $AC = 15$ и $BC = 20$. Тада је $AB = 25$, а из сличности троуглова ABC , AMC и BMC се израчунава да је $CM = 12$, $MA = 9$ и $MB = 16$. Тада је површина троугла $AMC = 9 \cdot 12 : 2 = 54 \text{ cm}^2$, а површина троугла BMC једнака $16 \cdot 12 : 2 = 96 \text{ cm}^2$.

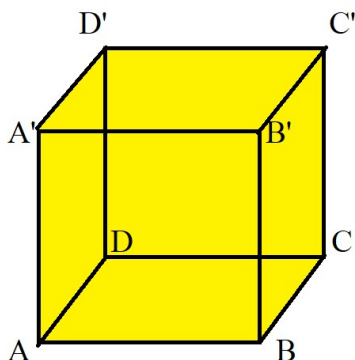
Треће решење: Из површине троугла ABC се добија да је хипотенузина висина $15 \cdot 20 : 25 = 12 \text{ cm}$. Онда се дужи AM и BM могу израчунати и применом Питагорине теореме. Добија се да је $AM^2 = 15^2 - 12^2 = 9^2$ и $BM^2 = 20^2 - 12^2 = 16^2$.

2. Реши једначину: $\frac{x+3}{2} - \frac{x+5}{3} = \frac{x+4}{5} - \frac{4x+2}{6}$.

Множењем и леве и десне стране једнакост са 30 добија се еквивалентна једначина $15(x+3) - 10(x+5) = 6(x+4) - 5(4x+2)$. Решавањем добијене једначине добија се да је решење дате једначине 1.

3. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ивице AB и CC_1 представљају један пар мимоилазних ивица коцке. Колико има парова мимоилазних ивица коцке? (Напомена: пар AB и CC_1 и пар CC_1 и AB представљају један исти пар).

Једна ивица коцке учествује у пару са 4 дуге мимоилазне ивице. На пример ивица AB се налази у паровима са себи мимоилазним ивицама (AB, CC') , (AB, DD') , $(AB, A'D')$, $(AB, B'C')$.

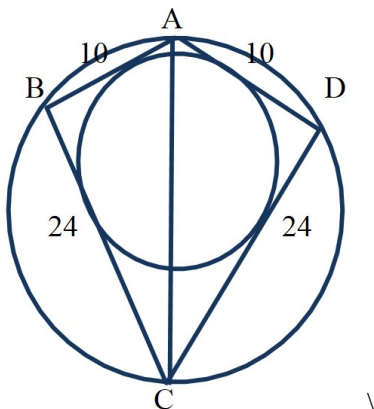


Како има 12 ивица то ће бити $12 \cdot 4 = 48$ парова. Међутим сваки пар се бројао два пута па је укупно $48 : 2 = 24$ парова мимоилазних ивица.

Напомена: До броја 24 се може доћи и простим набрајањем ивица које су мимилазне са AB , BC , CD ...

4. У круг је уписан делтоид чије две странице имају дужину 10 cm и 24 cm.
- Докажи да се у дати делтоид (а и сваки делтоид) може уписати круг.
 - За колико се разликују полупречник круга описаног око делтоида и полупречник круга уписаног у делтоид?

а) Како је збир наспрамних страница $AB + CD = 10 + 24 = 34 = BC + AD$, то је четвороугао $ABCD$ тангентни (што очигледно важи за сваки делтоид јер је $AB = AD = x$ и $BC = CD = y$, па је $AB + CD = x + y = AD + BC$).



б) Како је дати делтоид уписан у круг, он је и тетивни, па је збир наспрамних углова једнак 180° , што значи да су углови код A и C прави, јер су једнаки. Тада је дијагонала AC хипотенуза правоуглог троугла чије су катете 10 и 24 и једнака је 26 . Како је она пречник круга описаног око делтоида, полупречник је 13 .

Површина делтоида је једнака $24 \cdot 10 \cdot 2 : 2 = 240 \text{ cm}^2$. Полуобим делтоида је $10 + 24 = 34 \text{ cm}$. Полупречник круга уписаног у делтоид је једнак $P : s = 240 : 34 = 120 : 17$.

Разлика полупречника описаног и уписаног круга је $13 - 120/17 = 101/17$.

5. Одреди све реалне бројеве x такве да је $||x - 2024| - 2023| = 2022$.

Како је $||x - 2024| - 2023| = 2022$ то је

$$|x - 2024| - 2023 = 2022 \text{ или } |x - 2024| - 2023 = -2022.$$

Добијају се једначине $|x - 2024| = 4045$ и $|x - 2024| = 1$.

Следи да је $x - 2024 = 4045$, $x - 2024 = -4045$, $x - 2024 = 1$ и $x - 2024 = -1$.

Решења добијених једначина су 6069 , -2021 , 2025 и 2023 .