

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

Диофант



ДИОФАНТОВА  
МАТЕМАТИЧКА  
ТАКМИЧЕЊА  
2023/2024

# ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ

## ЗАДАЦИ

03.02.2024.

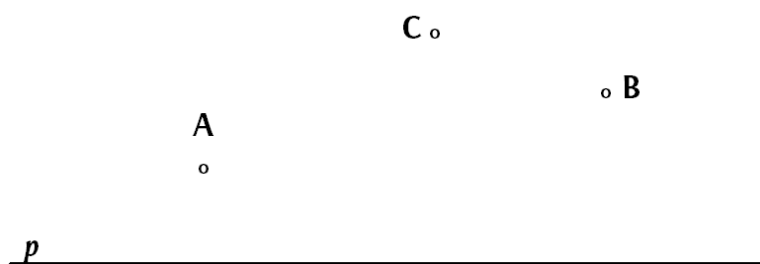


ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

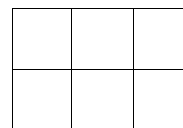
3. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ  
03. 02. 2024.

1. Следећу слику прецртај на твој радни папир.



- а) Користећи прибор нацртај праву  $a$  која садржи тачку  $A$  и паралелна је са правом  $p$ ;  
б) Нацртај праву  $b$  која садржи тачку  $B$  и нормална је на праву  $p$ ;  
в) Пресек правих  $b$  и  $p$  обележи са  $M$ ;  
г) Нацртај праву  $c$  која садржи тачке  $C$  и  $M$  и сече праву  $p$ ;  
д) Какав је  $\angle pMb$ : оштар, прав или туп?  
ђ) Какав је  $\angle pMc$ : оштар, прав или туп?
2. Колико има троцифрених парних бројева чији производ цифара је 24?
3. Колико се на датој слици може уочити:  
а) дужи; б) квадрата; в) правоугаоника.
4. Наташа је требала да дати број помножи са 5 и добијени производ увећа за 6. Међутим Наташа се збунила и дати број је помножила са 6 и на добијени производ додала 5 и тако добила број 275. Који број би Наташа добила да се није збунила?
5. Дат је низ природних бројева: 97, 91, 85, 79, 73 ...  
а) Који је последњи члан овог низа? б) Одреди збир свих чланова овог низа.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



# ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ „ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО ШКОЛСКА 2023/24

## 4 . РАЗРЕД

### ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 03. 02. 2024.

1. Данас је 3. фебруара 2024. године и тачно је 11:00 часова. За колико часова (сати) ће бити пробно окружно такмичење, ако је термин његовог одржавања 9. март 2024. године у 10:00 часова?
2. Лаза је замислио природан број  $x$ . Када је производ  $x \cdot x$  поделио са збиром  $x + x$  добио је број 2024. Одреди који се број добије када се  $x$  подели са 8?
3. Правоугаоник чији је обим 154 cm, је подељен на 10 једнаких (подударних) квадрата чије дужине страница су природни бројеви. Одреди обим таквог једног квадрата. Колико има решења?
4. Лена и Нина су имале једнаке суме новца. Лена је купила 5 свески и остало јој је 105 динара, а Нина је купила 3 свеска и остало јој је 333 динара. Колико кошта једна свеска? Колико новца је потрошила Лена, а колико Нина?
5. Колико има природних бројева  $x$ , таквих да је  $989 < 4x + 5 < 1241$ ?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ  
03. 02. 2024.

1. Напиши 10 разломака који су већи од  $\frac{2}{3}$ , а мањи од  $\frac{5}{6}$ .
2. Кружнице  $k_1$  и  $k_2$  чији су центри  $O_1$  и  $O_2$  и полупречници 5 cm и 3 cm се додирују. Нацртај одговарајућу слику и одреди дужину дужи  $O_1O_2$ . Колико решења има?
3. Скупови  $A$  и  $B$  су различити подскупови скупа  $S = \{ 1, 2, 3 \dots 11, 12, 13 \}$ . Скупови  $A$  и  $B$  имају следеће особине:  $A \cap B = \{ 6, 12 \}$ ; НЗД елемената скупа  $A$  је једнак 2; НЗД елемената скупа  $B$  једнак је 3. Одреди најмањи могући и највећи могући збир елемената скупа  $A \cup B$ .
4. На правој  $a$  дато је 7, а на њој паралелној правој  $b$  10 различитих тачака.
  - а) Колико правих одређују дате тачке?
  - б) Колико дужи одређују дате тачке?
5. Дато је 100 узастопних природних бројева већих од 100. Докажи да је међу њима најмање 60 сложених бројева.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ  
03. 02. 2024.

1. На колико начина се број 24 може приказати као производ неколико узастопних целих бројева?
2. У квадрату ABCD дата је тачка E, тако да је троугао ABE једнакостраничан.  
а) Докажи да је  $CE = DE$ .  
б) Израчунај  $\angle CDE$  и  $\angle BCE$ .
3. Збир четири различита природна броја је 125. Ако се први сабере са 4, од другог одузме 4, трећи помножи са 4, а четврти подели са 4, добијају се једнаки бројеви. О којим бројевима је реч?
4. Дато је 1000 узастопних природних бројева. Докажи да је међу њима има више од 654 сложених бројева.
5. Дат је троугао ABC у коме је тачка M средиште странице BC. Одреди углове троугла ABC, ако је  $\angle ABM = 30^\circ$  и  $\angle BAM = 15^\circ$ .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ  
03. 02. 2024.

1. Четири дечака Вук, Лука, Константин и Урош треба да поделе 2024 динара. Колико је новца добио свако од њих, ако је договор да се новац подели у размери  $0,8 : 1 : 1,2 : 1,4$  ?
2. а) Одреди најмањи природан број  $n$  такав да је и број  $m = \sqrt{2024 \cdot n}$  природан број  
б) Израчунај број  $m$ .
3. Дужине странице троугла су  $a = 13$  cm,  $b = 20$  cm и  $c = 21$  cm. Израчунај дужину висина датог троугла.
4. а) Колико цифара има број  $2^{40}$ ?  
б) Која је последња цифра броја  $2^{40}$ ?  
в) Одреди последње две цифре броја  $2^{40}$ .
5. Дат је троугао ABC у коме је тачка М средиште странице BC и  $BM = CM = 5$  cm. Одреди обим и површину троугла ABC, ако је  $\angle ABM = 30^\circ$  и  $\angle BAM = 15^\circ$ .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ  
03. 02. 2024.

1. Колико има природних бројева  $n$  таквих да је  $2023 < \frac{n-4}{5} \leq 2024$ .
2. Коцка и квадар имају једнаке запремине. Ко има већу површину: коцка или квадар, ако се ивице квадра односе као  $1 : 2 : 4$  ?
3. Колико има парова природних бројева  $x$  и  $y$ , таквих да је  $5x + 11y = 2024$ ?
4. Дат је троугао  $ABC$  у коме је тачка  $M$  средиште странице  $BC$ ,  $\angle ABM = 30^\circ$  и  $\angle BAM = 15^\circ$ . Докажи да је  $AB = \frac{AC \cdot AM}{CM}$ .
5. а) Одреди сва реална решења једначине  $|x - |2x + |3x - 45||| = 19$ .  
б) За које вредности реалног броја  $a$  једначина  $|x - |2x + |3x - 45||| = a$  има решења.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

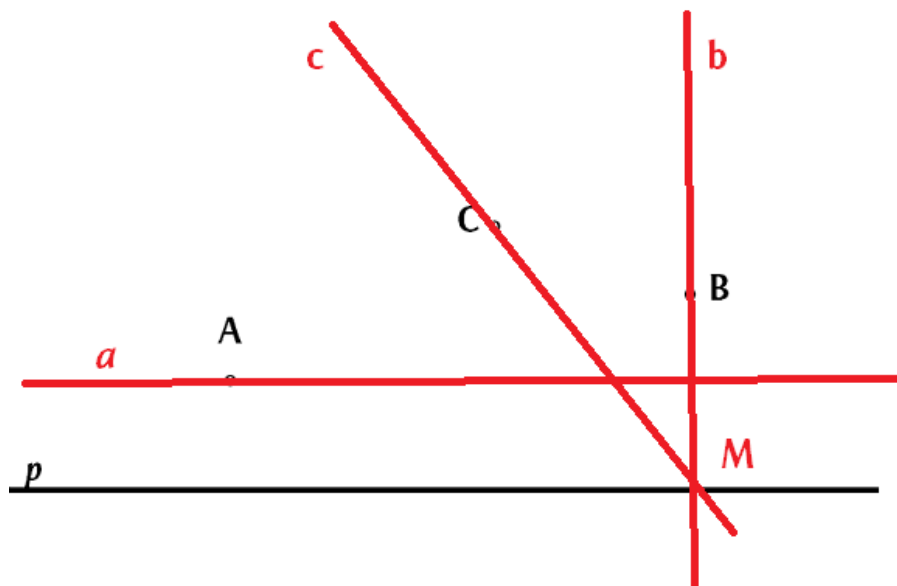
ПРОБНО  
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ

РЕШЕЊА

05.02.2024.

### 3. РАЗРЕД

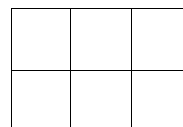
1. Решење је дато на следећој слици.



Угао  $\angle pMb$  је прав, а угао  $\angle pMc$  је оштар.

2. Број 24 се као производ три једноцифрена броја (цифре) може написати на следеће начине:  
 $1 \cdot 3 \cdot 8$ ,  $1 \cdot 4 \cdot 6$ ,  $2 \cdot 2 \cdot 6$ ,  $2 \cdot 3 \cdot 4$ .  
 Тражени парни троцифрени бројеви су: 138, 318; 146, 164, 416, 614; 226, 262, 622; 234, 324, 342 и има их 13.

3. Дужи има  $6 + 6 + 6 = 18$  хоризонталних и  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$  вертикалних. Укупно 30.  
 Квадрата има 6 ( $1 \times 1$ ) и 2 ( $2 \times 2$ ). Укупно 8.  
 Правоугаоника има  $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ .



4. Нека је дати број  $x$ . Наташа је добила да је  $x \cdot 6 + 5 = 275$ . Тада је  $x \cdot 6 = 275 - 5 = 270$ .  
 Следи да је  $x = 270 : 6 = 45$ . Наташа је требала да добије број  $x \cdot 5 + 6 = 45 \cdot 5 + 6 = 231$ .
5. У датом низу разлика свака два суседна броја је 6, па ће се добити низ бројева:  
 97, 91, 85, 79, 73, 67, 61, 55, 49, 43, 37, 31, 25, 19, 13, 7, 1.  
 Последњи члан низа је 1.  
 Бројева има 17, а то је 8 парова и још један број, на пример 1. Онда је збир сваког пара једнак  $97 + 7 = 91 + 13 = 85 + 19 = \dots = 104$ , па је због 8 парова, збир свих чланова низа  $104 \cdot 8 + 1 = 832 + 1 = 833$ .

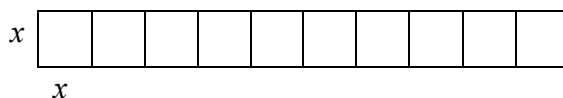
## 4 . РАЗРЕД

- Од 3. фебруара 2024. године у 11:00 часова до 4. фебруара 2024. у 00:00 часова има 13 часова. Од 04. фебруара у 00:00 до 04. марта 2023. у 00:00 има тачно 29 дана (2024 година је преступна, па фебруар има 29 дана), а то је  $29 \cdot 24 = 696$  часова. До окружног такмичења које је 9. март 2024. године у 10:00 часова, треба још 5 дана и 10 часова, а то је  $120 + 10 = 130$  часова. Дакле, то је укупно  $13 + 696 + 130 = 839$  часова.

- Када је Лаза производ  $x \cdot x$  поделио са збиром  $x + x$  добио је број  $x : 2 = 2024$ . То значи да је дати број  $x = 4048$ . Како је  $4048 : 8 = 506$ , тражени број је 506.

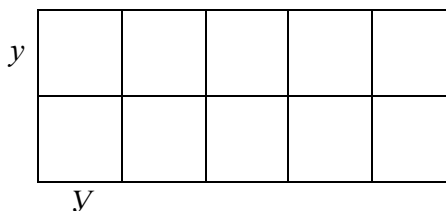
- Постоје две могућности:

1) Сви квадрати су у низу и има их 10.



Ако је страница сваког од овог квадрата  $x$ , онда је обим правоугаоника  $22x = 154$  и  $x = 154 : 22 = 7$  cm. Обим таквог једног квадрата је 28 cm.

2) Квадрати су у два низа по 5 квадрата (виде слике).



Ако је страница сваког од квадрата  $y$ , онда је обим правоугаоника  $14y = 154$ , па је  $y = 11$  cm. Обим таквог једног од квадрата је 44 cm.

- Прво решење: Из услова задатка је јасно да  $5 - 3 = 2$  свеске имају цену колико је  $333 - 105 = 228$  динара. Тада је једна свеска  $228 : 2 = 114$  динара. То значи да је Лена потрошила  $5 \cdot 114 = 570$  динара, а Нина  $3 \cdot 114 = 342$  динара. Лена и Нина су имаче по  $570 + 105 = 342 + 333 = 675$  динара.

Друго решење: Услови задатка се могу представити дужима.

Лена    o-----o-----o-----o-----o-----o-----o---105---o  
 Нина    o-----o-----o-----o-----o-----333-----o

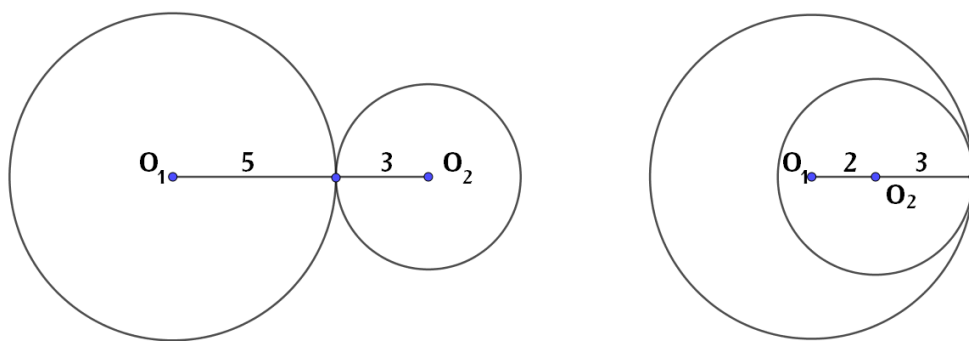
Са слике се види да је цена две свеске и 105 динара једнака 333 динара.

Треће решење: Ако је цена свеске  $x$ , онда је Лена имала  $5x + 105$ , а Нина  $3x + 333$  динара. Тада је  $5x + 105 = 3x + 333$ . Сабирак  $5x$  једнак је збир  $3x + 333$  минус сабирак 105, па је  $5x = 3x + 333 - 105$  или  $5x = 3x + 228$ . Сабирак 228 једнак је збир  $5x$  – сабирак  $3x$ , па је  $5x - 3x = 228$  или  $2x = 228$  и коначно  $x = 114$ .

5. Ако је  $989 < 4x + 5 < 1241$ , онда постоје две неједнакости:  $989 < 4x + 5$  и  $4x + 5 < 1241$ . Решавањем сваке од њих добија се да је  $989 - 5 < 4x$  и  $4x < 1241 - 5$ . Следи да је  $984 < 4x$  и  $4x < 1236$ , па је  $246 < x$  и  $x < 309$ . То значи да је  $246 < x < 309$ . Ако се решење напише као скуп онда је  $x \in \{ 247, 248, 249 \dots, 307, 308 \}$ . И тражених природних бројева има  $308 - 246 = 62$ .

## 5. РАЗРЕД

1. Прво решење: Нека је сваки од тражених разломака  $x$ . Тада је  $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{6}$ .  
Ако се први разломак прошири са 40, а други са 20 добије се  $\frac{80}{120} < x < \frac{100}{120}$ .  
Тада је  $x \in \left\{ \frac{81}{120}, \frac{82}{120} \dots \frac{98}{120}, \frac{99}{120} \right\}$ . У скупу има чак 19 тражених разломака.
- Друго решење: Ако се разломци  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{5}{6}$  напишу у децималном запису онда је  $0,666\dots < x < 0,8333\dots$ . Тада су тражени разломци елементи скупа  $\{ 0,667; 0,668; 0,669 \dots 0,831; 0,833 \} = \left\{ \frac{667}{1000}, \frac{668}{1000}, \dots, \frac{831}{1000}, \frac{833}{1000} \right\}$ . и има их 167.
- Напомена. И у првом и у другом решењу има више од 10 разломака. Може се доказати да у суштини тих разломака има бесконачно. Али могу се добити и други разломци који задовољавају неједнакост  $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{6}$ .
2. Разликују се два случаја: ако се кружнице додирују споља и изнутра.  
Оба случаја су приказана сликама са којих је видљиво да је код спољног додира  $O_1O_2 = 5 + 3 = 8$  cm, а код унутрашњег додира  $O_1O_2 = 5 - 3 = 2$  cm.

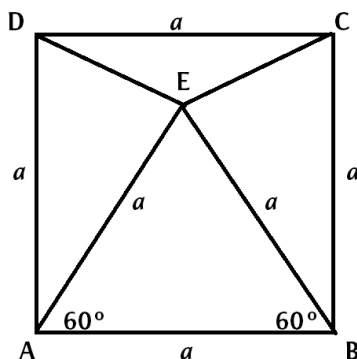


3. У скуповима А и В (који су различити) обавезни елементи су 6 и 12.  
У скупу А могу бити још 2, 4, 8 и 10, а у скупу В 3 и 9.  
Најмањи могући збир елемената скупа  $A \cup B$  добија се када је  $A = \{2, 6, 12\}$  и  $B = \{3, 6, 12\}$  и тај збир је  $2 + 3 + 6 + 12 = 23$  (скупови А и В поред 6 и 12 морају имати још неки елеменат да би били различити)  
Највећи могући збир елемената скупа  $A \cup B$  добија се када је  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  и  $B = \{3, 6, 9, 12\}$  и тај збир је  $2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 = 54$ .

4. а) Тачке праве  $a$  и тачке праве  $b$  одређују  $7 \cdot 10 = 70$  правих што уз праве  $a$  и  $b$  чини укупно 72 праве.  
 б) Укупно има  $7 + 10 = 17$  тачака. Тих 17 тачака одређују  $17 \cdot 16 : 2 = 272 : 2 = 136$  дужи.
5. Од 100 узастопних природних бројева већих од 100 тачно 50 су парни, па су према томе и сложени. Од 100 узастопних природних бројева 10 се завршава цифром 5 па су дељиви са 5 и такође сложени. То значи да има најмање  $50 + 10 = 60$  сложених бројева.

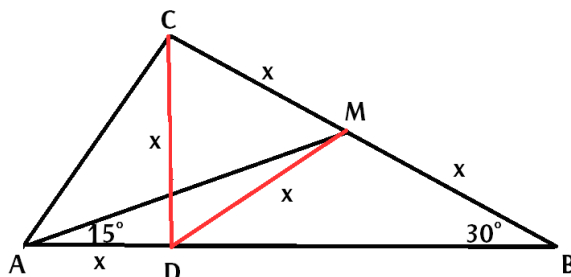
## 6. РАЗРЕД

1. На три начина:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1)$ .
2. а) Како је троугао ABE једнакостраничан, то је  $AB = BC = CD = DA = AE = BE = a$ .  
 Постоји и једнакост углова:  $\angle ABE = \angle BEA = \angle EAB = 60^\circ$ .  
 Тада су троуглови AED и BCE подударни јер је:  $AE = BE = a$ ,  $\angle EAD = \angle ECB = 30^\circ$  и  $AD = BC = a$ . Из подударности трпуглова је  $CE = DE$ .  
 б) Како су троуглови AED и BCE једнакокраки то је  $\angle ADE = 75^\circ$  и  $\angle BCE = 75^\circ$ . Тада је  $\angle CDE = \angle BCE = 15^\circ$ .



3. Нека су добијени једнаки бројеви  $x$ .  
 Тада је први број био  $x - 4$ , други  $x + 4$ , трећи  $x : 4$  и четврти  $x \cdot 4$ .  
 Следећи да је  $x - 4 + x + 4 + \frac{x}{4} + 4x = 125$ , тј.  $25 \cdot \frac{x}{4} = 125$ , па је  $\frac{x}{4} = 5$  и  $x = 20$ .  
 Тражени бројеви су  $20 - 4 = 16$ ,  $20 + 4 = 24$ ,  $20 : 4 = 5$  и  $20 \cdot 4 = 80$ .  
 Провера:  $16 + 24 + 5 + 80 = 125$ .
4. Сви природни бројеви се према остатку при дељењу са 6 могу поделити у 6 подскупова који немају заједничких елемената. То су бројеви који при дељењу са 6 дају остатке 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Сви бројеви који дају остатке 0, 2 и 4 су парни, па према томе и сложени, а сви бројеви који дају остатак 3 су дељиви са 3, па према томе и сложени. Како је  $1000 : 6 = 166$  (4), то је најмање  $4 \cdot 166 = 664$  сложена броја. Претпоставимо да се у тих 664 броја налазе и бројеви 2 и 3 (који нису сложени а при дељењу са 6 дају остатке 2 и 3), па можемо рећи да је најмање  $664 - 2 = 662 > 654$ . Тиме је тврђење доказано.

5. Ако се конструише нормала  $CD$  из тачке  $C$  на страницу  $AB$ , онда је троугао  $BCD$  правоугли. Тада је  $BM = CM = DM = x$ , као полупречници круга описаног око правоуглог троугла  $BCD$ .  
Следи да је троугао  $BMD$  једнакокрак ( $BM = MD = x$ ), па је  $\angle MDB = \angle DBM = 30^\circ$ .  
Онда је  $\angle BMD = 120^\circ$ , што значи да је  $\angle DMC = 60^\circ$ .



То значи да је троугао  $DMC$  једнакостраничан ( $DM = MC = x$ ).

Закључујемо и да је  $CD = x$ .

Како је  $\angle AMB = 135^\circ$  и  $\angle DMB = 120^\circ$ , то је  $\angle AMD = 15^\circ$  и јасно је да је троугао  $AMD$  једнакокрак, јер је  $\angle AMD = \angle DAM = 15^\circ$ . Следи да  $AD = DM = x$ .

У правоуглом троуглу  $ACD$  је  $AD = CD = x$ , па је троугао  $ACD$  једнакокрак и  $\angle DAC = \angle BAC = 45^\circ$ .

Углови троугла  $ABC$  су  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $105^\circ$ .

## 7. РАЗРЕД

1. Прво решење: Пропорција  $0,8 : 1 : 1,2 : 1,4$  је уствари пропорција  $8 : 10 : 12 : 14$  или  $4 : 5 : 6 : 7$ . Делова има  $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ . Један део је  $2024 : 22 = 92$ . То значи да је Вук добио 368, Лука 460, Константин 552 и Урош 644 динара.

Друго решење: Делова има  $0,8 + 1 + 1,2 + 1,4 = 4,4$ . Један део је  $2024 : 4,4 = 20240 : 44 = 460$ . То значи да је новац подељен на делове  $0,8 \cdot 460 = 368$ ,  $460$ ,  $1,2 \cdot 460 = 552$  и  $1,4 \cdot 460 = 644$  динара.

2. а) Како је  $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ , најмањи такав број  $n = 2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$ .

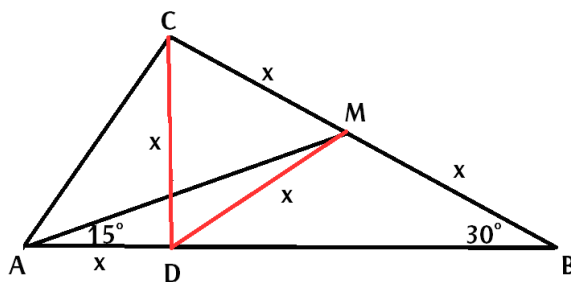
б)  $m = \sqrt{2024 \cdot n} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23} = 4 \cdot 11 \cdot 23 = 1012$ .

3. Прво решење: На основу Херонове формуле површина троугла је  $126 \text{ cm}^2$ . Тражене висине су:  $\frac{252}{13}, \frac{252}{20} = \frac{63}{5}, \frac{252}{21} = 12$ .

Друго решење: Ако се најдужа страница троугла, висином  $h$  која јој одговара (нацртај слику), подели на делове  $x$  и  $21 - x$ , добија се да је  $h^2 = 132 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$ .

Решавањем претходне једначине по  $x$  добија се  $x = 5 \text{ cm}$ , а онда израчунавањем следи:  $h = 12 \text{ cm}$ , површина  $21 \cdot 12 : 2 = 126 \text{ cm}^2$  и остале две висине.

4. а) како је  $2^{10} = 1024$  то је  $1000 = 10^3 < 2^{10} < 1100 = 11 \cdot 10^2$ .  
Тада је  $(10^3)^4 < (210)^4 < (11 \cdot 10^2)^4$ .  
Следи да је  $10^{12} < 2^{40} < 11^4 \cdot 10^8$  и  $1000000000000 < 240 < 1464100000000$ .  
То знаћи да број  $2^{40}$  има 13 цифара.
- б) Како је  $2^{40} = 4^{20}$  и као се непарни степени броја 4 завршавају цифром 4, а парни цифром 6, то се је последња цифра броја  $2^{40}$  једнака 6.
- в) Како је  $2^{40} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024$  и како је  $24 \cdot 24 = 576$ , а  $76 \cdot 76 = 5776$ , то су последње две цифре броја  $2^{40}$  једнаке 76.
5. Ако се конструише нормала CD из тачке C на страницу AB, онда је троугао BCD правоугли. Тада је  $BM = CM = DM = x$ , као полупречници круга описаног око правоуглог троугла BCD.
- Следи да је троугао BMD једнакокрак ( $BM = MD = x$ ), па је  $\angle MDB = \angle DBM = 30^\circ$ .  
Онда је  $\angle BMD = 120^\circ$ , што значи да је  $\angle DMC = 60^\circ$ .



То значи да је троугао DMC једнакостраничан ( $DM = MC = x$ ).

Закључујемо и да је  $CD = x$ .

Како је  $\angle AMB = 135^\circ$  и  $\angle DMB = 120^\circ$ , то је  $\angle AMD = 15^\circ$  и јасно је да је троугао AMD једнакокрак, јер је  $\angle AMD = \angle DAM = 15^\circ$ . Следи да  $AD = DM = x$ .

У правоуглом троуглу ACD је  $AD = CD = x$ , па је троугао ACD једнакокрак и  $\angle DAC = \angle BAC = 45^\circ$ .

Углови троугла ABC су  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $105^\circ$ , а странице  $BC = 2x = 10$ ,  $AC = x\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$  и .

$AB = x + x\sqrt{3} = 5 + 5\sqrt{3}$ . Обим троугла је  $15 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ , а површина

$$\frac{1}{2}(5 + 5\sqrt{3}) \cdot 5 = \frac{25}{2}(1 + \sqrt{3}).$$

## 8. РАЗРЕД

1. Дата неједначина  $2023 < \frac{n-4}{7} \leq 2024$  је еквивалентна са неједначином

$14161 < n - 4 \leq 14168$ . Следи да је  $14165 < n \leq 14172$ , па тражених природних бројева има  $14172 - 14165 = 7$  и то су бројеви 14166, 14167, 14168, 14169, 14170, 14171 и 14172.

2. Нека су ивице квадра  $x$ ,  $2x$  и  $4x$ . Запремина квадра је  $x \cdot 2x \cdot 4x = 8x^3$ . Како је запремина коцке једнака запремини квадра, то је запремина коцке такође  $8x^3$ , што значи да је ивица коцке једнака  $2x$ .

Површина квадра је  $2(x \cdot 2x + 2x \cdot 4x + 4x \cdot x) = 2 \cdot (2x^2 + 8x^2 + 4x^2) = 2 \cdot 14x^2 = 28x^2$ .

Површина коцке је  $6(2x)^2 = 6 \cdot 4x^2 = 24x^2$ .

Како је  $28x^2 > 24x^2$ , то квадар има већу површину од коцке.

3. Једно решење једначине  $5x + 11y = 2024$ , је  $y_0 = 4$ , а тада је  $5x_0 = 2024 - 44 = 1980$ , па је  $x_0 = 396$ .

Једно решење линеарне Диофантове једначине је  $x = x_0 - 11k$  и  $y = y_0 + 5k$  ( $k$  је неки цео број), па је  $x = 396 - 11k > 0$  и  $y = 4 + 5k > 0$ .

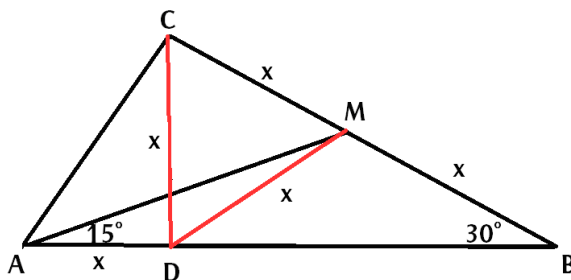
Из прве неједнакости је  $396 - 11k > 0$ , па је  $k < 396 : 11 = 36$  и  $k > (-4) : 5$ .

Значи да је  $0 \leq k < 36$ , па постоји 36 парова природних бројева за које је  $5x + 11y = 2024$ .

4. Ако се конструише нормала  $CD$  из тачке  $C$  на страницу  $AB$ , онда је троугао  $BCD$  правоугли. Тада је  $BM = CM = DM = x$ , као полупречници круга описаног око правоуглог троугла  $BCD$ .

Следи да је троугао  $BMD$  једнакокрак ( $BM = MD = x$ ), па је  $\angle MDB = \angle DBM = 30^\circ$ .

Онда је  $\angle BMD = 120^\circ$ , што значи да је  $\angle DMC = 60^\circ$ .



То значи да је троугао  $DMC$  једнакостраничан ( $DM = MC = x$ ).

Закључујемо и да је  $CD = x$ .

Како је  $\angle AMB = 135^\circ$  и  $\angle DMB = 120^\circ$ , то је  $\angle AMD = 15^\circ$  и јасно је да је троугао  $AMD$  једнакокрак, јер је  $\angle AMD = \angle DAM = 15^\circ$ . Следи да  $AD = DM = x$ .

У правоуглом троуглу  $ACD$  је  $AD = CD = x$ , па је троугао  $ACD$  једнакокрак и  $\angle DAC = \angle BAC = 45^\circ$ .

Углови троугла  $ABC$  су  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $105^\circ$ , али су и углови троугла  $AMC$  такође  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $105^\circ$ , па су та два троугла слична.

Из сличности је  $AB : AM = AC : CM$ . Следи да је  $AB = \frac{AC \cdot AM}{CM}$ .

5. б) У решавању једначине  $|x - |2x + |3x - 45||| = a$  разликују се два случаја:

1) Ако је  $x < 15$ , онда је  $3x - 45 < 0$ , па је  $|3x - 45| = 45 - 3x$ .

Тада је  $2x + |3x - 45| = 2x + 45 - 3x = 45 - x > 0$ .

Следи да је  $|2x + |3x - 45|| = 45 - x$ , па је  $x - |2x + |3x - 45|| = x - 45 + x = 2x - 45 < 0$  и  $|x - |2x + |3x - 45||| = |45 - 2x| = 45 - 2x = a$ .

То значи да је  $x = \frac{45 - a}{2}$ , па је због  $x < 15$ ,  $x = \frac{45 - a}{2} < 15$ , тј.  $a > 15$ .

2) Ако је  $x \geq 15$ , онда је  $3x - 45 \geq 0$ , па је  $|3x - 45| = 3x - 45$ .

Тада је  $2x + |3x - 45| = 2x + 3x - 45 = 5x - 45 > 0$ .

Следи да је  $|2x + |3x - 45|| = 5x - 45$ , па је  $x - |2x + |3x - 45|| = x - 5x + 45 = 45 - 4x < 0$  и  $|x - |2x + |3x - 45||| = |4x - 45| = 4x - 45 = a$ .

То значи да је  $x = \frac{45 + a}{4}$ , па је због  $x \geq 15$ ,  $x = \frac{45 + a}{4} \geq 15$ , тј.  $a \geq 15$ .

Дакле једначина има решење ако је  $a \geq 15$ , а нема решење ако је  $a < 15$ .

а) Како је  $a = 19 > 15$ , једначина  $|x - |2x + |3x - 45||| = 19$  има решење.

Ако је  $x < 15$ , решење је  $x = \frac{45 - a}{2}$ , што значи да је решење  $13 < 15$ .

Ако је  $x \geq 15$ , решење је  $x = \frac{45 + a}{4}$ , што значи да је решење и  $16 > 15$ .