

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

Диофант



ПРОБНО ОКРУЖНО
ТАКМИЧЕЊЕ 2024.

9. МАРТ 2024.



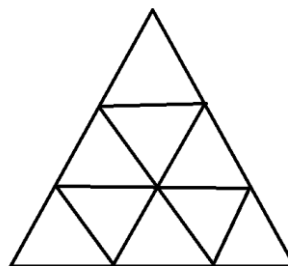
ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

3. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
09. 03. 2024.

1. Алекса је 8 године старији од Филипа. Колико година има Алекса, а колико Филип, ако Алекса има три пута више година од Филипа.
2. Дато је сабирање $A + AA + AAA = ABC$ у коме једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговарају различите цифре. Одреди сва могућа решења.
3. Збир два природна броја x и y је 12.
 - а) Одреди најмању вредност израза $89 \cdot x - 7 \cdot y$.
 - б) Одреди највећу вредност израза $91 \cdot x - 13 \cdot y$.
4. Допуни поља датог квадрата (слика лево) природним бројевима тако да збир бројева у свакој хоризонтали, вертикали и дијагонали буде једнак.

8		
	22	6



5. Колико дужи и колико троуглова видиш на претходној слици (слика десно).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

4. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
09. 03. 2024.

1. Збир 10 природних бројева је 2024. Колики ће бити збир тих 10 бројева ако 7 сабирака увећамо за 10, а три сабирка умањимо за 20?
2. Обим правоугаоника је 2024 см. Правоугаоник је подељен на 10 једнаких (подударних) квадрата чије странице имају дужине изражене природним бројем центиметара. Одреди обим и површину једног од тих квадрата.
3. За нумерацију кућних бројева на десној странице улице, где су све парни бројеви кућа, употребљено је 274 цифре. Колико цифара је употребљено за нумерацију кућа на левој страни улице, ако су са леве стране улице има 25 кућа мање него на десној страни улице и ако су све куће нумерисане непарним бројевима?
4. Петар и Павле су своје часовнике дотерали на тачно време 09.03.2024, у 10:00 часова. Петров часовник показује тачно време, а Павлов часовник сваког сата (часа) напредује (жури) по 1 (један) минут. Колико сати и минута ће бити 16.03.2024. на Павловом часовнику, када на Петровом часовнику буде 12:00 сати?
5. Збир 11 узастопних парних природних бројева је 2024. О којим бројевима је реч?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
09. 03. 2024.

1. Праве a и b секу се у тачки O , тако да је $\angle aOb = \alpha = 42^\circ$. Нацртај одговарајућу слику и обележи и израчунај углове β , γ и δ , ако је угао β комплементаран углу α , угао γ суплементаран углу α , а угао δ унакрсан са углом α .
2. Производ три различита природна броја a , b и c је 2024.
а) Колики је најмањи могући збир бројева a , b и c ?
б) Колики је највећи могући збир бројева a , b и c ?
3. Одреди скупове A и B такви да је: $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, $A \cap B = \{ 8, 9 \}$, збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B и број елемената скупа A већи од броја елемената скупа B . Колико има различитих решења?
4. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 4 чије су све цифре прости бројеви, ако се цифре: а) не могу понављати; б) могу понављати?
5. Збир два разломка са једноцифреним именицима је $\frac{34}{21}$. О којим се разломцима се ради? Колико има решења?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
09. 03. 2024.

1. Конструисати једнакократи троугао ABC ($AC = BC$) ако је $AB + BC = 8$ cm и ако је $\angle ABC = 30^\circ$.
2. Колики има десетоцифрених бројева који су дељиви са 18, код којих су све цифре различите?
3. У паралелограму $ABCD$, на дијагонали AC дата је тачка E , таква да је $AE = BE = BC$. Израчунати $\angle CAB$ и $\angle BCA$, ако је $\angle CDA = 102^\circ$.
4. Колико најмање и колико највише узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 2024?
5. Неша и Саша окрече једну зграду за 40 сати. Саша и Раша окрече исту зграду за 72 сата, а Раша и Неша окрече зграду за 60 сати. За колико сати би зграду окречили Неша, Саша и Раша, ако би радили заједно?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
09. 03. 2024.

1. Дати су полиноми $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 8$ и $B(x) = 24 - 18x + 12x^2 - 6x^3$.
Одреди целе бројеве m и n такве да је $m \cdot A(x) + n \cdot B(x) = 0$ и $m + n = 8$.
2. Тежишне дужи троугла ABC имају дужину: $t_a = 6$ cm, $t_b = 9$ cm и $t_c = 12$ cm.
Конструиши троугао ABC.
3. Колики има десетоцифрених бројева који су дељиви са 36, код којих су све цифре различите?
4. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $2x^4 + y^8 = 444 \dots 444$ (2024 четворке)?
5. Странице троугла ABC имају дужине $a = 8$, $b = 10$ и $c = 12$. Израчунај колико износи збир квадрата тежишних дужи троугла, тј. $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
09. 03. 2024.

1. Графици функција $x = 2$, $y = x - 1$, $x = 6$ и $y = kx + 2$ одређују паралелограм ABCD. Израчунај обим и површину тог паралелограма.
2. Права правилна четворострана пирамида има основну ивицу која је једнака 9 cm и висину која је једнака 18 cm. Пирамида је пресечена са равни α која је паралелна са равни основе и од равни основе удаљена 10 cm. Израчунај запремине делова (тела) на које раван α дели дату пирамиду.
3. Конструисати троугао ако су дате дужине његових висина: $h_a = 4$ cm, $h_b = 5$ cm и $h_c = 6$ cm.
4. Одреди све природне бројеве x , y и z , такве да је $x^2 + y^2 + z^2 = 2024$.
5. У троуглу ABC је на страници AB дата D, таква да је $AC = BD$. Одреди углове троугла ABC, ако је $\angle BAC = 80^\circ$ и $\angle BCD = 40^\circ$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 150 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

3. РАЗРЕД

1. Алекса је 8 године старији од Филипа. Колико година има Алекса, а колико Филип, ако Алекса има три пута више година од Филипа.

Прво решење:

Прикажимо број Филипових и Алексиних година дужима:

Филип:	о----- а -----о
Алекса:	о----- а -----о----- 8 -----о
Алекса:	о----- а -----о----- а -----о----- а -----о

Са слике је очигледно $2 \cdot a = 8$, па је $a = 8 : 2 = 4$.

То значи да Филип има 4, а Алекса 12 година.

Друго решење:

Ако Филип има x година, онда Алекса има $x + 8$ година. Из услова задатка је $x + 8 = 3 \cdot x$.

Тада је $3 \cdot x - x = 8$, па је $2 \cdot x = 8$ и $x = 4$.

Следи да Филип има 4, а Алекса 12 година.

2. Дато је сабирање $A + AA + AAA = ABC$ у коме једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговарају различите цифре. Одреди сва могућа решења.

Из услова задатка следи да је на месту десетица нема преноса, па је $A < 5$.

Ако је $A = 1$, имамо сабирање $1 + 11 + 111 = 123$, што значи да је $B = 2$ и $C = 3$.

Ако је $A = 2$, имамо сабирање $2 + 22 + 222 = 246$, што значи да је $B = 4$ и $C = 6$.

Ако је $A = 3$, имамо сабирање $3 + 33 + 333 = 369$, што значи да је $B = 6$ и $C = 9$.

Ако је $A = 4$, имамо сабирање $4 + 44 + 444 = 492$, што значи да је $B = 9$ и $C = 2$.

Дакле, дато сабирање има 4 решења.

3. Збир два природна броја x и y је 12.

а) Одреди најмању вредност израза $89 \cdot x - 7 \cdot y$.

б) Одреди највећу вредност израза $91 \cdot x - 13 \cdot y$.

а) Најмања вредност се постиже када је умањеник $89x$ најмањи (једнак $89 \cdot 1$), а умањилац $7 \cdot y$ највећи (једнак $7 \cdot 11$). Тада је $89 \cdot x - 7y = 89 \cdot 1 - 7 \cdot 11 = 89 - 77 = 12$.

б) Највећа вредност се постиже када је умањеник $91x$ највећи (једнак $91 \cdot 11$), а умањилац $13 \cdot y$ најмањи (једнак $13 \cdot 1$). Тада је $91 \cdot x - 13y = 91 \cdot 11 - 13 \cdot 1 = 1001 - 13 = 988$.

4. Допуни поља датог квадрата (слика лево) природним бројевима тако да збир бројева у свакој хоризонтали, вертикали и дијагонали буде једнак.

Нека је у гоњем левом углу број x .

Тада је $x + 8 = 22 + 6$, па је $x = 28 - 8 = 20$ (слика лево).

То значи да је централни број магичног кавадрата једнак $(20 + 6) : 2 = 26 : 2 = 13$.

Тада је карактеристични збир магичног квадрата једнак $3 \cdot 13 = 39$.

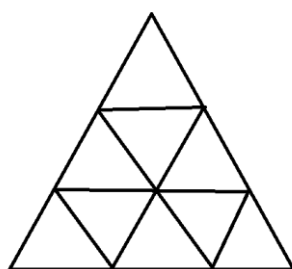
Следе и остали бројеви у магичном квадрату (слика десно).

x		
8		
	22	6

20	4	15
8	13	18
11	22	6

+

5. Колико дужи и колико троуглова видиш на претходној слици (слика десно).



На хоризонталном (и сваком од три) правца има 6 дужи дужине 1, 3 дужи дужине 2 и 1 дуж дужине 3, што значи $6 + 3 + 1 = 10$ дужи. Укупан број дужи је $3 \cdot 10 = 30$.

На датој слици има $5 + 3 + 1 = 9$ троуглова чија је страница 1, 3 троугла чија је страница 2 и 1 троугао чија је страница 3, што је укупно $9 + 3 + 1 = 13$ троуглова.

4. РАЗРЕД

1. Збир 10 природних бројева је 2024. Колики ће бити збир тих 10 бројева ако 7 сабирака увећамо за 10, а три сабирка умањимо за 20?

Ако 7 сабирака увећамо за по 10, онда се збир увећа за $7 \cdot 10 = 70$.

Ако се 3 сабирка умање за по 20, онда се збир умањи за $3 \cdot 20 = 60$.

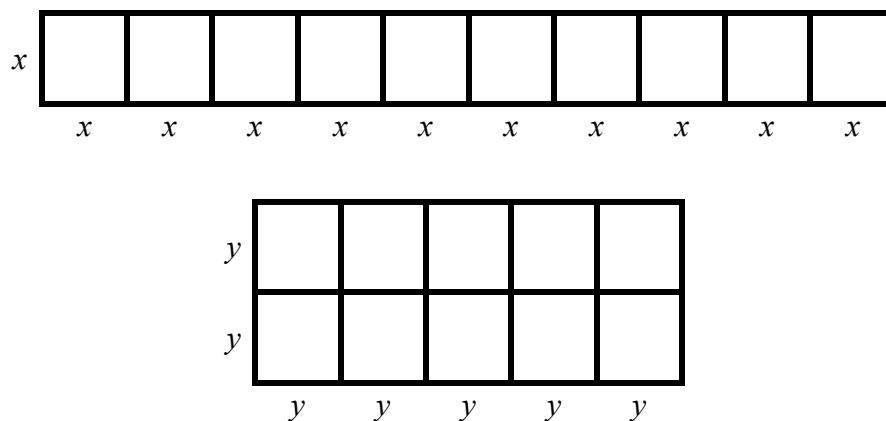
Нови збир ће бити $2024 + 70 - 60 = 2024 + 10 = 2034$.

2. Обим правоугаоника је 2024 см. Правоугаоник је подељен на 10 једнаких (подударних) квадрата чије странице имају дужине изражене природним бројем центиметара. Одреди обим и површину једног од тих квадрата.

Како је правоугаоник подељен на 10 квадрата, могући су следећи случајеви:

(1) када су странице квадрата $10 \cdot x$ и x и обим $22 \cdot x$:

(2) када су странице квадрата $2 \cdot y$ и $5 \cdot y$ и обим $14 \cdot y$ (види слике)



Како је 2024 дељиво са 22 и није дељиво са 14, то је могућ само први случај.

Дакле страница једног од 10 квадрата је $2024 : 22 = 92$ cm.

Његов обим је $O = 4 \cdot x = 4 \cdot 92 = 368$ cm, а површина $P = x \cdot x = 92 \cdot 92 = 8464$ cm².

3. За нумерацију кућних бројева на десној странице улице, где су све парни бројеви кућа, употребљено је 274 цифре. Колико цифара је употребљено за нумерацију кућа на левој страни улице, ако су са леве стране улице има 25 кућа мање него на десној страни улице и ако су све куће нумерисане непарним бројевима?

За нумерацију кућа са десне стране улице употребљено је $4 + 90 + 180$ цифара. То значи да су 4 куће нумерисан једноцифреним, 45 кућа двоцифреним и 60 кућа троцифреним бројевима.

Тад у тој улици на десној (парној страни улице има $4 + 45 + 60 = 109$ кућа, а на левој (непарној) страни улице има $109 - 25 = 84$ куће.

За нумерацију $5 + 45 + 34$ куће на левој страни улице треба $5 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 34 = 5 + 90 + 102 = 197$ цифара.

4. Петар и Павле су своје часовнике дотерали на тачно време 09.03.2024, у 10:00 часова. Петров часовник показује тачно време, а Павлов часовник сваког сата (часа) напредује (жури) по 1 (један) минут. Колико сати и минута ће бити 16.03.2024. на Павловом часовнику, када на Петровом часовнику буде 12:00 сати?

Од 09.03.2024. године у 10:00 часова до 16.03.2024. у 12 часова протекне 7 дана и 2 часа, што износи $7 \cdot 24 + 2 = 168 + 2 = 170$ часова. То значи да ће Павлов часовник за то време напредовати 170 минута или 2 часа и 50 минута. Следи да ће Павлов часовник показивати време $12:00 + 2:50 = 14:50$ или 14 часова и 50 минута.

5. Збир 11 узастопних парних природних бројева је 2024. О којим бројевима је реч?

Ако средњи од тражених бројева означимо са x , онда је тражени збир

$$x - 10 + x - 8 + x - 6 + x - 4 + x - 2 + x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8 + x + 10 = 11 \cdot x.$$

Следи да је $11 \cdot x = 2024$, па је $x = 2024 : 11 = 184$.

Тражени бројеви су 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192, 194.

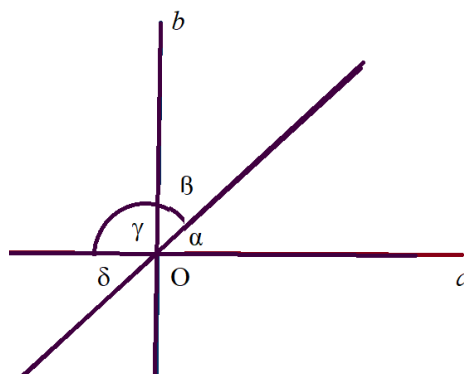
5. РАЗРЕД

1. Праве a и b секу се у тачки O , тако да је $\angle aOb = \alpha = 42^\circ$. Нацртај одговарајућу слику и обележи и израчунај углове β , γ и δ , ако је угао β комплементаран углу α , угао γ суплементаран углу α , а угао δ унакрсан са углом α .

Углови α и β су комплементни па је $\beta = 90^\circ - \alpha = 48^\circ$.

Углови α и γ су суплементни па је $\gamma = 180^\circ - \alpha = 138^\circ$.

Углови α и δ су унакрсни па је $\delta = \alpha = 42^\circ$.



2. Производ три различита природна броја a , b и c је 2024.

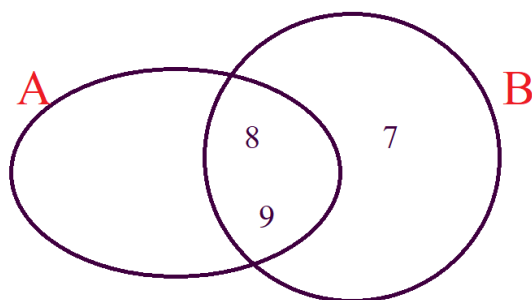
- а) Колики је најмањи могући збир бројева a , b и c ?
б) Колики је највећи могући збир бројева a , b и c ?

Из услова задатка је $a \cdot b \cdot c = 2024 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$.

Најмањи збир $a + b + c$ се добије када су чиниоци најмање разликују, то јест када су 8, 11 и 23 и тада је $a + b + c = 8 + 11 + 23 = 42$.

Највећи збир $a + b + c$ се добије када су чиниоци највише разликују, то јест када су 1, 2 и 1012 и тада је $a + b + c = 1 + 2 + 1012 = 1015$.

3. Одреди скупове A и B такви да је: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{8, 9\}$, збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B и број елемената скупа A већи од броја елемената скупа B . Колико има различитих решења?



Из услова задатка је збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B .

То значи да је и збир елемената скупа $A \setminus B$ једнак збиру елемената скупа $B \setminus A$ једнак x .

То значи да је $2x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, па је $x = 14$.

Како је број елемената скупа A већи од броја елемената скупа B и како за збир 14 треба најмање три различита броја, то скуп A има 4, а скуп B 3 елемента.

Ако је 7 у скупу В, закључујемо да број 7 мора ићи у трочланим комбинацијама $7 + 1 + 6$, или $7 + 2 + 5$ или $7 + 3 + 4$ и то су комбинације које дефинишу скуп В.

Ако је 7 у скупу А, онда је то могуће само ако је збир још три броја 7, а то је могуће само у комбинацији $7 + 1 + 2 + 4$.

Следи да постоје 4 решења и то: $A = \{ 1, 2, 4, 7, 8, 9 \}$, $B = \{ 3, 5, 6, 8, 9 \}$;

$A = \{ 2, 3, 4, 5, 8, 9 \}$, $B = \{ 1, 6, 7, 8, 9 \}$; $A = \{ 1, 3, 4, 6, 8, 9 \}$, $B = \{ 2, 5, 7, 8, 9 \}$ и

$A = \{ 1, 2, 5, 6, 8, 9 \}$, $B = \{ 3, 4, 7, 8, 9 \}$.

4. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 4 чије су све цифре прости бројеви, ако се цифре: а) не могу понављати; б) могу понављати?

Ако су цифре прости бројеви, она су цифре 2, 3, 5 и 7.

Да би четвороцифрен број био дељив са 4, последња цифра мора бити 2 и двоцифрени завршетак дељив са 4, па у обзир долазе само бројеви $**32$, $**52$ и $**72$.

а) Ако се цифре не могу понављати таквих бројева има $2 + 2 + 2 = 6$, јер прве две цифре су само прости бројеви који нису већ коришћени.

б) Ако се цифре могу понављати онда за сваку од три написане комбинације постоји $4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16$ бројева, па је таквих четвороцифрених бројева $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48$.

5. Збир два разломка са једноцифреним имениоцима је $\frac{34}{21}$. О којим се разломцима се ради? Колико има решења?

Како је $21 = 3 \cdot 7 = 1 \cdot 21$, а имениоци једноцифрени, у обзир долазе само разломци чији су имениоци 3 и 7, па је $\frac{34}{21} = \frac{x}{3} + \frac{y}{7}$ (x и y су природни бројеви).

Ако први разломак проширимо са 7, а други са 3, добија се да је

$$\frac{x \cdot 7}{3 \cdot 7} + \frac{y \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{7 \cdot x + 3 \cdot y}{21} = \frac{34}{21}, \text{ што значи да је } 7 \cdot x + 3 \cdot y = 34.$$

Тада је $7 \cdot x < 34$, па x може бити само 1, 2, 3 или 4.

Ако је $x = 1$, онда је $3 \cdot y = 34 - 7 = 27$ и $y = 9$, а тражени разломци су $\frac{1}{3}$ и $\frac{9}{7}$.

Ако је $x = 2$, онда је $3 \cdot y = 34 - 14 = 20$ и y није природан број.

Ако је $x = 3$, онда је $3 \cdot y = 34 - 21 = 13$ и y није природан број.

Ако је $x = 4$, онда је $3 \cdot y = 34 - 28 = 6$ и $y = 2$, а тражени разломци су $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{7}$.

Дакле, постоје само два решења $\frac{1}{3}$ и $\frac{9}{7}$ и $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{7}$.

6. РАЗРЕД

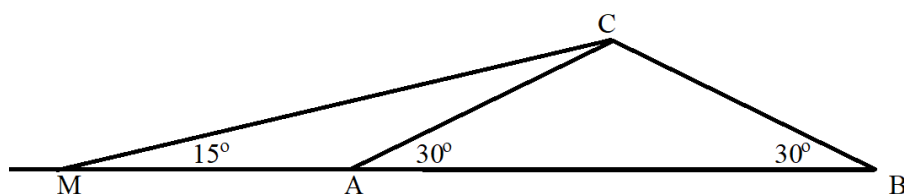
1. Конструисати једнакократи троугао ABC ($AC = BC$) ако је $AB + BC = 8 \text{ cm}$ и ако је $\angle ABC = 30^\circ$.

Анализа: Како је троугао ABC једнакократ и како је $AC = BC$, то је $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$. Ако је праву AB продужимо преко тачке A за дуж AC , добија се тачка M таква да је $AM = AC = BC$.

Тада је троугао ACM једнакократ и $\angle AMC = \angle ACM = 15^\circ$.

Следи да је могуће конструисати троугао BCM чији су елементи:

$\angle BMC = 15^\circ$, $BM = AB + AM = AB + AC = AB + BC = 8 \text{ cm}$ и $\angle MBC = 30^\circ$.



Конструкција: На правој p треба одредити тачке M и B , такве да је дуж $MB = 8 \text{ cm}$.

Потом се конструишу $\angle BMx = 15^\circ$ и $\angle MBu = 30^\circ$.

Пресек кракова x и y тих углова дефинише тачку C .

Како је $BC = AC$, тачка A се добија као тачка праве MB која је од тачке C удаљена за BC .

2. Колики има десетоцифрених бројева који су дељиви са 18, код којих су све цифре различите?

Сви десетоцифрени бројеви са различитим цифрама су дељиви са 9, јер је збир њихових цифара једнак $1 + 2 + \dots + 8 + 9 + 0 = 45$.

Да би били дељиви са 18, морају бити парни, па је њихова последња цифра парна и једнака 0, 2, 4, 6 и 8.

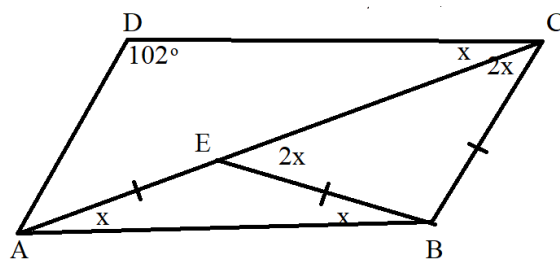
Ако је последња цифра десетоцифреног броја 0, онда има $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ таквих десетоцифрених бројева, јер прва цифра може бити свака осим 0 ...

Ако последња цифра десетоцифреног броја није 0, онда има $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 4$ таквих десетоцифрених бројева, јер прва цифра не може бити 0 ни последња парна цифра ...

Дакле тражених десетоцифрених бројева има $(9 + 32) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =$

$41 \cdot 8 \cdot 5040 = 1\,653\,120$.

3. У паралелограму $ABCD$, на дијагонали AC дата је тачка E , таква да је $AE = BE = BC$. Израчунати $\angle CAB$ и $\angle BCA$, ако је $\angle CDA = 102^\circ$.



Нека је $\angle BAC = x$. Тада је и $\angle ABE = x$, јер је $AE = BE$.

Следи да је $\angle BEC$ као спољашњи угао троугла ABE једнак $x + x = 2x$.

Како је $BE = BC$, то је $\angle BEC = \angle BCE = 2x$.

Међутим и $\angle BAC = \angle ACD = x$ (углови с паралелним крацима), па је $\angle BCD = 3x$.

Тада је $\angle BCD = 3x = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$ и $\angle BAC = x = 26^\circ$.

Угао $\angle BCA = 2x = 52^\circ$.

4. Колико најмање и колико највише узастопних целих бројева треба сабрати да би се добио збир 2024?

Како је $(-2023) + (-2022) + \dots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + 2023 + 2024 = 2024$, то је највећи број целобројних сабирака једнак $2023 + 1 + 2023 + 1 = 4048$.

За најмање сабирака, треба детаљније разматрање.

Нека су тражени бројеви $x + 1, x + 2, \dots, x + k$ ($k > 1$).

Тада је њихов збир једнак $kx + \frac{k(k+1)}{2} = 2024$ или $2kx + k(k+1) = 4048$.

Следи да је $k(2x + k + 1) = 4048$, а бројеви k и $2x + k + 1$ су различите парности.

Како је $4048 = 1 \cdot 4048 = 2 \cdot 2024 = 4 \cdot 1012 = 8 \cdot 506 = 11 \cdot 368$ то је најмања вредност k једнака 11. Следи да је $2x + 11 + 1 = 368$, па је $2x = 356$ и $x = 178$.

Најмање има 11 сабирака и то су бројеви 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188 и 189.

5. Неша и Саша окрече једну зграду за 40 сати. Саша и Раша окрече исту зграду за 72 сата, а Раша и Неша окрече зграду за 60 сати. За колико сати би зграду окречили Неша, Саша и Раша, ако би радили заједно?

Неша и Саша за један сат окрече $\frac{1}{40}$ део зграде, Саша и Раша за један сат окрече $\frac{1}{72}$ део

зграде, а Раша и Неша окрече $\frac{1}{60}$ зграде.

То значи да Неша, Саша и Раша за два сата окрече $\frac{1}{40} + \frac{1}{72} + \frac{1}{60} = \frac{9+5+6}{360} = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}$

део зграде, а целу зграду ће окречити за $2 \cdot 18 = 36$ сати.

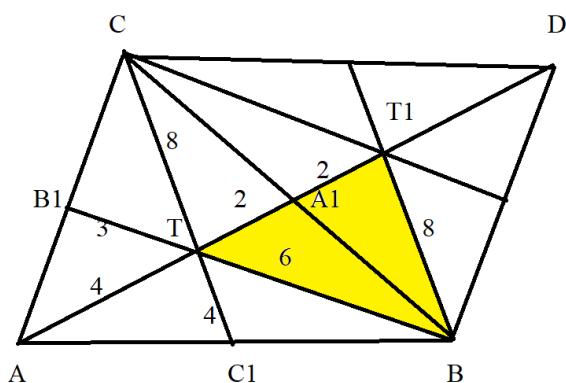
7. РАЗРЕД

1. Дати су полиноми $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 8$ и $B(x) = 24 - 18x + 12x^2 - 6x^3$.
Одреди целе бројеве m и n такве да је $m \cdot A(x) + n \cdot B(x) = 0$ и $m + n = 8$.

Како је $m \cdot A(x) + n \cdot B(x) = 0$, то је $m(2x^3 - 4x^2 + 6x - 8) + n(24 - 18x + 12x^2 - 6x^3) = 0$.
Следи да је $m2x^3 - n6x^3 = 0$, $-m4x^2 + n12x^2 = 0$, $m6x - n18x = 0$ и $-m8x + n24 = 0$.

Тада је $2m - 6n = 0$ и $m + n = 8$, па је $m = 6$ и $n = 2$.

2. Тежишне дужи троугла ABC имају дужину: $t_a = 6$ cm, $t_b = 9$ cm и $t_c = 12$ cm.
Конструиши троугао ABC.



Анализа: Ако доцртамо троугао BCD који је подударан са троуглом ABC, онда се могу уочити тачка Т која је тежиште троугла ABC и тачка T_1 која је тежиште троугла BCD. Тада је у троуглу BT_1T : $BT = \frac{2}{3} t_b = 6$ cm, $TT_1 = 4$ cm и $BT_1 = \frac{2}{3} t_c = 8$ cm.

Конструкција: Конструише се помоћни троугао BT_1T са елементима: $BT = 6$ cm, $TT_1 = 4$ cm и $BT_1 = 8$ cm.

На правој TT_1 треба конструисати тачку А тако да је $TA = 4$ cm.

Потом на правој АВ треба конструисати тачку C_1 , тако да је $AC_1 = C_1B$.

И на крају на правој C_1T треба конструисати тачку С тако да је $TC = 8$ cm.

3. Колики има десетоцифрених бројева који су дељиви са 36, код којих су све цифре различите?

Сви десетоцифрени бројеви са различитим цифрама су дељиви са 9, јер је збир њихових цифара једнак $1 + 2 + \dots + 8 + 9 + 0 = 45$.

Да би били дељиви са 36, морају двоцифрени завршетци бити дељиви са 4, па у обзир долазе следећи двоцифрени завршетци: 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92, 96 (двоцифрени завршетци 00, 44, 88 опадају јер све цифре морају бити различите). Тада има 6 двоцифрених завршетака који садрже 0 и 16 двоцифрених завршетака не садрже нулу.

Тражених бројева је $6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 16 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 8! + 112 \cdot 7!$
 $(48 + 112) \cdot 7! = 160 \cdot 7! = 20 \cdot 8! = 160 \cdot 5040 = 806\,400$.

4. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $2x^4 + y^8 = 444 \dots 444$ (2024 четворке)?

Ако је n природан број, онда се број n^2 завршава цифрама 0, 1, 4, 5, 6 и 9.

Тада се број n^4 завршава цифрама 0, 1, 5 и 6 и број $2n^4$ завршава цифрама 0 и 2, а број n^8 завршава цифрама 0, 1, 5, 6.

Последња цифра израза $2x^4 + y^8$ дефинисана је следећом таблицом

$2x^4 \downarrow$	$y^8 \rightarrow$	0	1	5	6
0		0	1	5	6
2		2	3	7	8

Из таблице се види да се број $2x^4 + y^8$ завршава цифрама 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 и 8 и никада не завршава цифрама 4 и 9. Према томе једначина $2x^4 + y^8 = 444 \dots 444$ нема решења ни за један пар целих бројева x и y .

5. Странице троугла ABC имају дужине $a = 8$, $b = 10$ и $c = 12$. Израчунај колико износи збир квадрата тежишних дужи троугла, тј. $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2$.

Познато је да за тежишне дужи и странице троугла важи релација $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ па следи да је $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(64 + 100 + 144) = 3 \cdot 308 = 3 \cdot 4 \cdot 77$.

Тада је $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = 3 \cdot 77 = 231$.

8. РАЗРЕД

1. Графици функција $x = 2$, $y = x - 1$, $x = 6$ и $y = kx + 2$ одређују паралелограм ABCD. Израчунај обим и површину тог паралелограма.

Да би се добио паралелограм праве $y = x - 1$ и $y = kx + 2$ морају бити паралелне, па ће друга права имати једначину $y = x + 2$.

Тада су темена траженог паралелограма: A (2, 1), B (6, 5), C (2, 4) и D (6, 8).

Дужине страница паралелограма су 3 и $4\sqrt{2}$, а висина 4.

Обим паралелограма је $6 + 8\sqrt{2}$, а површина $3 \cdot 4 = 12$.

2. Права правилна четворострана пирамида има основну ивицу која је једнака 9 cm и висину која је једнака 18 cm. Пирамида је пресечена са равни α која је паралелна са равни основе и од равни основе удаљена 10 cm. Израчунај запремине делова (тела) на које раван α дели дату пирамиду.

Нека је основна ивица мале пирамиде једнака x .

Из сличности је $9 : x = 18 : (18 - 10)$, па је $18x = 72$ и $x = 4$ cm.

Запремина велике пирамиде је $9 \cdot 9 \cdot 18 : 3 = 81 \cdot 6 = 486 \text{ cm}^3$.

Запремина мале пирамиде је $4 \cdot 4 \cdot 8 : 3 = 128/3 \text{ cm}^3$.

Запремина зарубљене пирамиде је $486 - 128/3 = (1458 - 128) : 3 = 1330/3 \text{ cm}^3$.

3. Конструисати троугао ако су дате дужине његових висина: $h_a = 4 \text{ cm}$, $h_b = 5 \text{ cm}$ и $h_c = 6 \text{ cm}$.

Из површине троугла следи да је $a = \frac{2P}{h_a} = \frac{2P}{4}$, $b = \frac{2P}{h_b} = \frac{2P}{5}$, $c = \frac{2P}{h_c} = \frac{2P}{6}$.

Тада је $a : b : c = \frac{2P}{4} : \frac{2P}{5} : \frac{2P}{6} = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \frac{60}{4} : \frac{60}{5} : \frac{60}{6} = 15 : 12 : 10$.

Конструира се троугао ABC чије су странице 15, 12 и 10, или 7,5 cm, 6 cm и 5 cm.

Тражени троугао је сличан троуглу ABC и има висину $h_c = 6 \text{ cm}$.

4. Одреди све природне бројеве x , y и z , такве да је $x^2 + y^2 + z^2 = 2024$.

Постоје два случаја: када су два броја непарна, а један паран и када су сва три броја парна.

(1) Нека је $x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$ и $z = 2c$.

Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + 4c^2 = 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 + 4c^2 = 2024$.

Једначина нема решења, јер лева страна једнакости при дељењу са 4 даје остатак 2, а десна страна једнакости је дељива са 4.

(2) Нека је $x = 2a$, $y = 2b$ и $z = 2c$.

Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 2024$, па је $a^2 + b^2 + c^2 = 506$.

Како је $506 : 4 = 126(2)$, једначина има решење само када су два броја непарна, а један паран.

Нека је $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$ и $c = 2k$.

Тада је $a^2 + b^2 + c^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 + 4k^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4k^2 = 506$ или $m^2 + m + n^2 + n + k^2 = m(m + 1) + n(n + 1) + k^2 = 126$.

Следи да је број паран и $k^2 \leq 126$, па је k паран број мањи од 11, тј. $k \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

Разликовањем случајева по k , добијају се решења:

* $k = 2$, $m = 10$, $n = 3$, па је $x = 42$, $y = 14$ и $z = 8$;

* $k = 4$, $m = 9$, $n = 4$, па је $x = 38$, $y = 18$ и $z = 16$;

* $k = 4$, $m = 10$, $n = 0$, па је $x = 42$, $y = 2$ и $z = 16$;

* $k = 6$, $m = 9$, $n = 0$, па је $x = 38$, $y = 2$ и $z = 24$;

* $k = 8$, $m = 6$, $n = 4$, па је $x = 26$, $y = 18$ и $z = 32$;

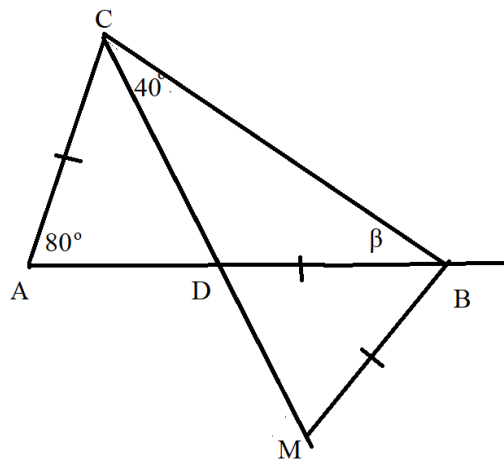
* $k = 8$, $m = 7$, $n = 2$, па је $x = 30$, $y = 10$ и $z = 32$;

* $k = 10$, $m = 4$, $n = 2$, па је $x = 18$, $y = 10$ и $z = 40$.

Дакле, решења су: $(42, 14, 8)$; $(38, 18, 16)$; $(42, 2, 16)$; $(38, 2, 24)$; $(26, 18, 32)$; $(30, 10, 32)$;

$(18, 10, 40)$. Једначина има $7 \cdot 6 = 42$ решења, јер се за свако од 5 добијених решења морају (због симетричности променљивих x , y и z рачунати и све пермутације.

5. У троуглу ABC је на страници AB дата D, таква да је $AC = BD$. Одреди углове троугла ABC, ако је $\angle BAC = 80^\circ$ и $\angle BCD = 40^\circ$.



У троуглу ACD, $\angle ADC = 40^\circ + \beta$, па је $\angle ACD = 60^\circ - \beta$.

На правој CD одедимо тачку M, тако да је $BM = BD = AC$.

Троугао BDM је једнакокрак, па је $\angle BDM = \angle BMD = 40^\circ + \beta$.

Тада је $\angle MBD = 100^\circ - \beta$.

Троуглови ABC и BCM су подударни, јер је $BC = BC$, $\angle ACB = \angle MBD = 100^\circ - \beta$ и $AC = BD$ (СУС).

Из подударности је $\angle ABC = \angle BCM = 40^\circ$, па су углови у троуглу ABC једнаки 80° , 40° и 60° .