



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2023/24

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
04. 05. 2024.

1. Три ливаде имају површину 5, 15 и 36 хектара. На свакој од њих трава расте равномерно. Прву ливаду попасе 12 крава за 4 недеље, другу 21 крава за 9 недеља. Колико највише крава може пасти трећу ливаду 18 недеља? (Њутнов задатак о три ливаде)
2. Дат је број $A = 1^{2024} + 2^{2024} + 3^{2024} + 4^{2024} + 5^{2024} + 6^{2024}$. Колики је остатак при дељењу броја A са 7.
3. Ако су a , b и c дужине страница троугла ABC онда важи неједнакост:
$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} < 3.$$
 Докажи.
4. У правоугли троугао ABC , са правим углом код темена C уписан је правоугаоник $CDEF$, тако да тачка D припада катети AC , тачка E припада хипотенузи AB и тачка F припада катети BC , при чему је $AD = 6$ и $BF = 8$.
 - а) Колика је површина правоугаоника $CDEF$?
 - б) Колика је најмања могућа површина троугла ABC ?
5. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.