

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

Диофант



ПРОБНО ДРЖАВНО  
ТАКМИЧЕЊЕ 2024.

4. МАЈ 2024.

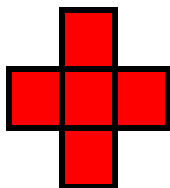


ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

3. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ  
04. 05. 2024.

1. Колико најмање, а колико највише узастопних природних бројева треба сабрати да би добијени збир био 105?
2. Одреди бар два решења ребуса  $\text{ДВА} + \text{ТРИ} = \text{ПЕТ}$ , у коме једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговарају различите цифре.
3. Колико дужи, квадрата и правоугаоника садржи црвени крст на наредној слици (лево)?
4. Колики је обим црвеног крста (слика лево), ако једна дуж у квадратној мрежи има дужину 7 mm?



|   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| 1 |  |  |   |
|   |  |  | 2 |
|   |  |  |   |
| 4 |  |  | 3 |

5. Допуни судоку на претходној слици (слика десно).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

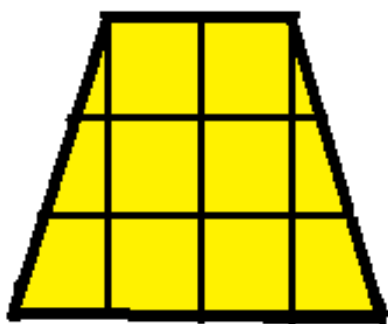


ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

4. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ  
04. 05. 2024.

1. На колико начина се број 105 може написати као збир неколико узастопних природних бројева?
2. Дато је сабирање  $ABA + BAB = 888$  у коме једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговарају различите цифре. Одреди сва могућа решења.
3. Колико троуглова, квадрата и правоугаоника садржи жута фигура на наредној слици (лево)?
4. Колика је површина жуте фигуре на наредној слици (слика лево), ако једна дуж у квадратној мрежи има дужину 7 mm?



|  |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|
|  | 3 |   | 4 |   |   |
|  |   | 5 | 6 |   | 3 |
|  |   |   | 1 |   |   |
|  | 1 |   | 3 |   | 5 |
|  | 6 | 4 |   | 3 | 1 |
|  |   | 1 |   | 4 | 6 |

5. Допуни судоку на претходној слици (слика десно).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ  
04. 05. 2024.

1. На колико начина се број 105 може написати као збир неколико узастопних природних бројева?
2. Углови  $\alpha$  и  $\beta$  су суплементни углови, а шестина угла  $\alpha$  и две трећине угла  $\beta$  су комплементни углови. Израчунај углове  $\alpha$  и  $\beta$ .
3. Одреди све просте бројеве  $x$  и  $y$ , такве да је  $3x + 5y = 100$ .
4. Компјутер има цену 50 000 динара. Због усклађивања са ценама осталих производа, пре месец дана је поскупео за 20%. Данас је трговац смањио цену за 20%. Колико сада кошта компјутер?
5. Допуни судоку на наредној слици

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 |   |   | 7 |   |   |   |   |
| 6 |   |   | 1 | 9 | 5 |   |   |   |
|   | 9 | 8 |   |   |   |   | 6 |   |
| 8 |   |   |   | 6 |   |   |   | 3 |
| 4 |   |   | 8 |   | 3 |   |   | 1 |
| 7 |   |   |   | 2 |   |   |   | 6 |
|   | 6 |   |   |   |   | 2 | 8 |   |
|   |   |   | 4 | 1 | 9 |   |   | 5 |
|   |   |   |   | 8 |   |   | 7 | 9 |

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ  
04. 05. 2024.

1. Свежа трава садржи 75% влаге и 25% суве материје. Сува трава (сено) садржи 75% суве материје и 25% влаге. Колико треба накосити свеже траве да би се добила једна тона сена?
2. На страници  $BC$  квадрата  $ABCD$  дата је тачка  $E$  таква да је  $\angle CDE = 20^\circ$ . У унутрашњој области квадрата  $ABCD$  дата је тачка  $M$ , таква да је троугао  $DEM$  правоугли и  $BM = EM$ . Одреди угао  $ABM$ .
3. У једнакоккраком трапезу  $ABCD$  углови на већој основици су  $60^\circ$ , а дијагонале трапеза су нормалне на крацима трапеза. Докажи да се око датог трапеза може описати кружница и израчунај њен полупречник, ако је обим трапеза 50 cm.
4. Одредити све природне бројеве  $x$  и  $y$ , такве да је  $3x + 5y = 75$ . Колико решења има дата једначина у скупу целих бројева?
5. Дат је скуп  $P$  који садржи 2024 различита проста броја. Докажи да у скупу  $P$  постоји бар 505 простих бројева који се завршавају истом цифром.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ  
04. 05. 2024.

- Тачке  $A_1, A_2, \dots, A_8, A_9$  су темена правилног деветоугла. Одреди углове троугла  $A_1A_3A_7$ .
  - Докажи да постоје две дијагонале тог многоугла које се секу под углом мањим од  $7^\circ$ ?
- Број који се једнако чита с лева на десно, као и с десна на лево назива се палиндром. На пример  $11^2 = 121$ , па је 121 палиндром. Докажи да постоји бесконачно много палиндрома који су потпуни квадрати.
- Колико има троцифрених бројева чији производ цифара је дељив са 70?
- Одреди све двоцифрене бројеве који су два пута већи од производа својих цифара.
- Играч А (први) и играч В (други) наизменично пишу различите цифре у поља таблице која садржи девет поља (у прво поље таблице се не може уписати цифра 0). Ако је добијени деветоцифрени број дељив са 6, победник је играч А, а ако није дељив са 6 победник је играч В. Ко има победничку стратегију, играч А (који има 5 потеза) или играч В (који има 4 потеза), ако се поља таблице могу попуњавати било којим редом?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ  
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО  
ШКОЛСКА 2023/24

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ  
04. 05. 2024.

1. Три ливаде имају површину 5, 15 и 36 хектара. На свакој од њих трава расте равномерно. Прву ливаду попасе 12 крава за 4 недеље, другу 21 крава за 9 недеља. Колико највише крава може пасти трећу ливаду 18 недеља? (Њутнов задатак о три ливаде)
2. Дат је број  $A = 1^{2024} + 2^{2024} + 3^{2024} + 4^{2024} + 5^{2024} + 6^{2024}$ . Колики је остатак при дељењу броја  $A$  са 7.
3. Ако су  $a$ ,  $b$  и  $c$  дужине страница троугла  $ABC$  онда важи неједнакост:  
$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} < 3.$$
 Докажи.
4. У правоугли троугао  $ABC$ , са правим углом код темена  $C$  уписан је правоугаоник  $CDEF$ , тако да тачка  $D$  припада катети  $AC$ , тачка  $E$  припада хипотенузи  $AB$  и тачка  $F$  припада катети  $BC$ , при чему је  $AD = 6$  и  $BF = 8$ .
  - а) Колика је површина правоугаоника  $CDEF$ ?
  - б) Колика је најмања могућа површина троугла  $ABC$ ?
5. Одреди све целе бројеве  $x$  и  $y$  такве да је  $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 180 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

# РЕШЕЊА

## 3. РАЗРЕД

1. Колико најмање, а колико највише узастопних природних бројева треба сабрати да би добијени збир био 105?

Најмање два  $52 + 53 = 105$ .

Највише 14, јер је  $1 + 2 + \dots + 13 + 14 = 7 \cdot 15 = 105$ .

2. Одреди бар два решења ребуса ДВА + ТРИ = ПЕТ, у коме једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговарају различите цифре.

Једно од могућих решења је:  $632 + 154 = 786$ .

Друго од могућих решења је:  $574 + 321 = 895$ .

3. Колико дужи, квадрата и правоугаоника садржи црвени крст?

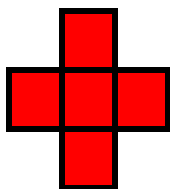
Хоризонталних дужи има  $1 + 6 + 6 + 1 = 14$  и вертикалних 14, што је 28.

Квадрата има укупно 5.

Правоугаоника има 3 (хоризонтална) + 3 (вертикална), што је укупно 6.

4. Колики је обим црвеног крста (слика лево), ако једна дуж у квадратној мрежи има дужину 7 mm?

У обиму има 12 јединичних дужи, па је обим црвеног крста  $12 \cdot 7 = 84$  mm.



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

5. Допуни судоку (слика десно).

Допуњени судоку је дат на слици десно.

Допуњени бројеви су означени црвеном бојом.

## 4. РАЗРЕД

1. На колико начина се број 105 може написати као збир неколико узастопних природних бројева?

Како је  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , број 105 се може представити на седам начина као збир 2, 3, 5, 6, 7, 10 и 14 узастопних природних бројева:

- $52 + 53 = 105$ ;
- $34 + 35 + 36 = 105$ ;
- $19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 105$ ;
- $15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 105$ ;
- $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 105$ ;
- $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 105$ ;
- $1 + 2 + \dots + 13 + 14 = 105$ .

2. Дато је сабирање  $ABA + BAB = 888$  у коме једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговарају различите цифре. Одреди сва могућа решења.

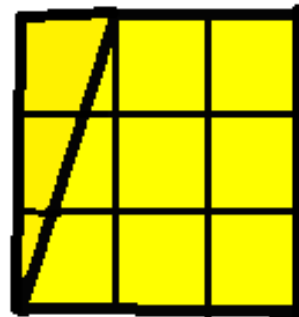
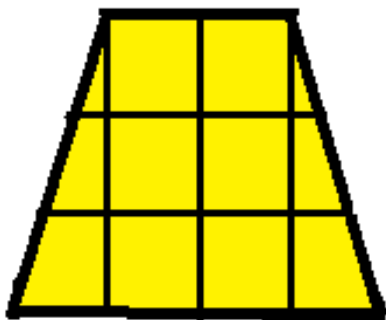
Јасно је да је  $A + B = 8$ , јер ако би  $A + B$  било веће од 10, једнакост не би била могућа. Тада предложено сабирање има 6 решења, јер  $A$  може бити 1, 2, 3, 5, 6 и 7 ( $A = 4$  није решење, јер би тада и  $B$  било 4, а то није могуће због услова задатка):  
 $171 + 717 = 262 + 626 = 353 + 535 = 535 + 353 = 626 + 262 = 717 + 171 = 888$ .

3. Колико троуглова, квадрата и правоугаоника садржи жута фигура на наредној слици (лево)?

Троуглова има 6, квадрата је  $6 + 2 = 8$ , а правоугаоника има  $6 + 3 + 1 = 10$ .

4. Колика је површина жуте фигуре на наредној слици (слика лево), ако једна дуж у квадратној мрежи има дужину 7 mm?

Дата фигура садржи 9 јединичних квадрата (слика десно). Површина сваког квадрата је  $7 \cdot 7 = 49 \text{ mm}^2$ . Површина фигуре је  $9 \cdot 49 = 441 \text{ mm}^2$ .



5. Допуни судоку на наредној слици.

Допуна је означена црвеним бројевима.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 4 | 5 | 2 |
| 2 | 4 | 5 | 6 | 1 | 3 |
| 6 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 |
| 5 | 6 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 5 | 4 | 6 |

## 5. РАЗРЕД

1. На колико начина се број 105 може написати као збир неколико узастопних природних бројева?

Како је  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , број 105 се може представити на седам начина као збир 2, 3, 5, 6, 7, 10 и 14 узастопних природних бројева:

- $52 + 53 = 105$ ;
- $34 + 35 + 36 = 105$ ;
- $19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 105$ ;
- $15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 105$ ;
- $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 105$ ;
- $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 105$ ;
- $1 + 2 + \dots + 13 + 14 = 105$ .

2. Углови  $\alpha$  и  $\beta$  су суплементни углови, а шестина угла  $\alpha$  и две трећине угла  $\beta$  су комплементни углови. Израчунај углове  $\alpha$  и  $\beta$ .

Како је  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , то је  $\beta = 180^\circ - \alpha$ . Тада је  $\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ$ .

Следи да је  $\frac{\alpha}{6} + 120^\circ - \frac{2\alpha}{3} = 90^\circ$ , па је  $120^\circ - 90^\circ = \frac{2\alpha}{3} - \frac{\alpha}{6} = \frac{4\alpha}{6} - \frac{\alpha}{6} = \frac{3\alpha}{6} = \frac{\alpha}{2}$ .

Како је  $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$ , то је  $\alpha = 60^\circ$  и  $\beta = 120^\circ$ .

3. Одреди све просте бројеве  $x$  и  $y$ , такве да је  $3x + 5y = 100$ .

Како су бројеви  $5y$  и  $100$  дељиви са  $5$ , то и број  $3x$  мора бити дељив са  $5$ , а то је могуће само ако је  $x = 5$ . Тада је  $15 + 5y = 100$ , па је  $5y = 85$  и  $y = 17$ . Једино решење једначине је  $x = 5, y = 17$ .

4. Компјутер има цену  $50\,000$  динара. Због усклађивања са ценама осталих производа, пре месец дана је поскупео за  $20\%$ . Данас је трговац смањио цену за  $20\%$ . Колико сада кошта компјутер?

Када је цена компјутера увећана за  $20\%$ , добијена је цена  $50\,000 \cdot 1,2 = 60\,000$ .

Када је цена компјутера умањена за  $20\%$ , добила се цена  $60\,000 \cdot 0,8 = 48.000$ .

5. Допуни судоку на наредној слици

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

Допуњени бројеви су означени црвеном бојом.

## 6. РАЗРЕД

1. Свежа трава садржи  $75\%$  влаге и  $25\%$  суве материје. Сува трава (сено) садржи  $75\%$  суве материје и  $25\%$  влаге. Колико треба накосити свеже траве да би се добила једна тона сена?

У једној тони сена има  $750$  килограма суве материје, што је  $25\%$  или једна четвртина свеже траве. Дакле свежа трава има масу од  $4 \cdot 750 = 3\,000$  килограма, или  $3$  тоне.

2. На страници BC квадрата ABCD дата је тачка E таква да је  $\angle CDE = 20^\circ$ . У унутрашњој области квадрата ABCD дата је тачка M, таква да је троугао DEM правоугли и  $BM = EM$ . Одреди угао ABM.

Нека је  $\angle ABM = \alpha$ .

Из услова задатка је  $\angle DEC = 90 - 20 = 70^\circ$ .

Из услова задатка следи да је троугао BME једнакокрак, па је  $\angle MBE = \angle MEB = 90^\circ - \alpha$ .

Тада је  $\angle MED = 180^\circ - 70^\circ - (90^\circ - \alpha) = 20^\circ + \alpha$ .

Следи да је  $\angle MDE = 180^\circ - 90^\circ - (20^\circ + \alpha) = 70^\circ - \alpha$ , а  $\angle MDC = 90^\circ - \alpha$ .

Како је BD дијагонала квадрата то је  $\angle DBC = \angle BDC = 45^\circ$ .

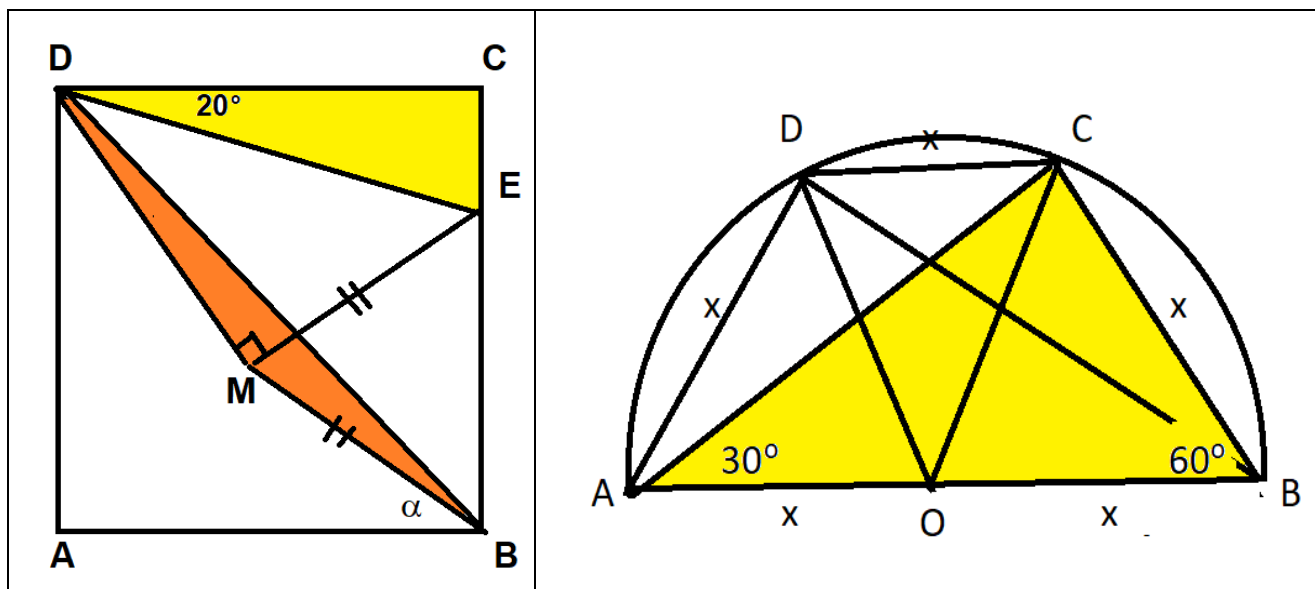
Добија се да је  $\angle MDB = \angle MDC - \angle BDC = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$ .

Слично је и  $\angle MBD = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha = \angle MDB$ .

Значи да је троугао MDB једнакокрак, па је  $MB = MD = ME$ .

Тада је  $\angle MDE = \angle MED = 45^\circ$ , па је  $\angle MEB = 90^\circ - \alpha = 180 - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$ .

Следи да је  $\alpha = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ .



3. У једнакокраком трапезу ABCD углови на већој основици су  $60^\circ$ , а дијагонале трапеза су нормалне на крацима трапеза. Докажи да се око датог трапеза може описати кружница и израчунај њен полупречник, ако је обим трапеза 50 cm.

Нека су краци трапеза  $BC = AD = x$ .

Троугао ABC је правоугли, јер је дијагонала AC нормална на краку BC, а  $\angle ABC = 60^\circ$ .

Како је тада наспрам крака  $BC = x$ , угао од  $30^\circ$ , то је хипотернуза  $AB = 2 \cdot BC = 2x$ .

Ако је O средиште основице AB, онда је  $AO = BO = CO = x$ .

На исти начин се доказује и да је  $AO = BO = DO = x = CO$ .

Тада кружници чије је центар у тачки O припадају тачке A, B, C и D.

Како је троугао CDO једнакостраничан то је и  $CD = x$ .

Тада је обим трапеза  $2x + x + x + x = 5x = 50$  cm, па је  $x = 10$  cm.

4. Одредити све природне бројеве  $x$  и  $y$ , такве да је  $3x + 5y = 75$ . Колико решења има дата једначина у скупу целих бројева?

Из услова задатка је  $3x + 5y = 75$ . Како су бројеви 5у и 75 дељиви са 3 то и 3х мора бити дељиво са 5, па је  $x = 5a$ .

Слично су и 3х и 75 дељиви са 3, па мора бити и 5у дељиво са 3, што значи да је  $y = 3b$ .

Следи да је  $15a + 15b = 75$  или  $a + b = 5$ ,

Могући парови решења у скупу природних бројева су:  $a = 1, b = 4$ ;  $a = 2, b = 3$ ;  $a = 3, b = 2$ ;  $a = 4, b = 1$ . Одговарајуће вредности за  $x$  и  $y$  су:  $x = 5, y = 12$ ;  $x = 10, y = 9$ ;  $x = 15, y = 6$ ;  $x = 20, y = 3$ .

Како је  $a + b = 5$ , то је  $b = 5 - a$ . Тада је  $x = 5a$  и  $y = 3b = 3(5 - a)$ , што значи да у скупу целих бројева решења има колико и бројева  $a$ , што значи бесконачно много.

5. Дат је скуп  $P$  који садржи 2024 различита проста броја. Докажи да у скупу  $P$  постоји бар 505 простих бројева који се завршавају истом цифром.

Сви прости бројеви се завршавају цифрама 1, 2, 3, 5, 7, 9 и никада не завршавају цифрама 0, 4, 6, и 8 (јер су тада обавезно дељиви са 2, дакле сложени).

Ако све просте бројеве према последњој цифри поделимо у 6 класа, онда се у класи 2 и 5 налази само по један број (2, односно 5).

Преосталих 2022 проста броја се налазе у 4 класе.

Како је  $2022 = 4 \cdot 505 + 2$ , то на основу Дирихлеовог принципа постоји бар  $505 + 1 = 506$  бројева који се завршавају истом цифром. Тиме је доказано и строжије тврђење од оног кога је требало показати.

## 7. РАЗРЕД

1. а) Тачке  $A_1, A_2, \dots, A_8, A_9$  су темена правилног деветоугла. Одреди углове троугла  $A_1A_3A_7$ .  
б) Докажи да постоје две дијагонале тог многоугла које се секу под углом мањим од  $7^\circ$ ?

а) Централни угао који одговара једној страници деветоугла је  $360 : 9 = 40^\circ$ . Тада су централни углови  $\angle A_1OA_3 = 80^\circ$ ,  $\angle A_3OA_7 = 160^\circ$  и  $\angle A_7OA_1 = 120^\circ$ , па су одговарајући периферијски углови  $\angle A_1A_7A_3 = 40^\circ$ ,  $\angle A_3A_1A_7 = 80^\circ$  и  $\angle A_1A_3A_7 = 60^\circ$ .

б) Деветоугао има  $9 \cdot 6 : 2 = 27$  дијагонала. Ако тих 27 дијагонала паралелно померимо у једну тачку (на пример у центар описане кружнице око деветоугла) онда се добију 54 угла. Ако би сви ти углови били већи или једнаки  $7^\circ$  њихов збир би био већи од  $360^\circ$ , што је немогуће. Дакле бар један угао је мањи од  $7^\circ$ .

Доказ да су две дијагонале паралелне (заклапају угао од  $0^\circ$ ) је такође регуларан.

2. Број који се једнако чита с лева на десно, као и с десна на лево назива се палиндром. На пример  $11^2 = 121$ , па је 121 палиндром. Докажи да постоји бесконачно много палиндрома који су потпуни квадрати.

Посматрамо број  $a = 100 \dots 001$  у коме има тачно  $k$  нула и две јединице.

Тај број  $a$  се може написати као  $a = 10^{k+1} + 1$ .

Тада је  $a^2 = (10^{k+1} + 1)^2 = 10^{2k+2} + 2 \cdot 10^{k+1} + 1 = 100 \dots 00200 \dots 001$ .

Добијени број има  $2k + 3$  цифара и представља палиндром, јер после 1 иде  $k$  нула, па једна двојка, па опет  $k$  нула и на крају још једна јединица.

Занимљиво је да су и број  $a$  и број  $a^2$  палиндроми.

А бројева облика 121, 10201, 1002001, 100020001 ... има бесконачно много.

3. Колико има троцифрених бројева чији производ цифара је дељив са 70?

Прво решење: Како је  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$  то тражени троцифрен број мора имати производ цифара 0 или мора садржати обавезно цифре 5 и 7 и неку парну цифру.

Троцифрених бројева који садрже 0 има  $900 - 9 \cdot 9 \cdot 9 = 900 - 729 = 171$ .

Троцифрених бројева који имају цифре 5, 7 и парна цифра (која није нула) има  $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ , јер се цифре 5, 7 и П (парна цифра) могу распоредити на 6 начина.

Укупно таквих бројева има  $171 + 24 = 195$ .

Друго решење: Сви тражени бројеви су облика 57П (парна цифра није 0), Х00, ХУ0.

Првих бројева има  $6 \cdot 4 = 24$ , јер 57П се може посматрати као 57П, 5П7, 75П, 7П5, П57, П75.

Других бројева има 9, јер прва цифра не може бити 0.

Трећих бројева има  $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ , јер их можемо посматрати само у облицима ХУ0 и Х0У.

Сабирањем добијамо укупно  $24 + 9 + 162 = 195$ .

4. Одреди све двоцифрене бројеве који су два пута већи од производа својих цифара.

Ако је тражени двоцифрени број  $10x + y$ , онда је  $10x + y = 2 \cdot xy$ .

Прво решење: Како је десна страна једнакости  $2xy$  паран број, то је и лева страна једнакости паран број, па је цифра  $y$  парна и различита од 0.

Разликовањем случајева за  $y$  добијају се једнакости:  $10x + 2 = 4x$ ,  $10x + 4 = 8x$ ,  $10x + 6 = 12x$ ,  $10x + 8 = 16x$ . Прва, друга и четврта једнакост нису могуће, јер тада  $x$  не би била цифра.

Једино решење се добија из треће једнакости, јер је  $2x = 6$  и  $x = 3$ .

Тражени број је  $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$ .

Друго решење: Како  $x$  не може бити нула, када се једнакост  $10x + y = 2xy$  подели са  $2x$ ,

добија се једнакост  $5 + \frac{y}{2x} = y$ . То значи да је  $y$  број већи од 5 и који је дељив са 2.

Дакле  $y = 6$  или  $y = 8$ . Ако је  $y = 6$ , онда је  $\frac{6}{2x} = 1$  или  $2x = 6$  и  $x = 3$ .

Ако је  $y = 8$ , онда је  $\frac{8}{2x} = 3$  и нема целобројних решења.

5. Игравч А (први) и играч В (други) наизменично пишу различите цифре у поља таблице која садржи девет поља (у прво поље таблице се не може уписати цифра 0). Ако је добијени деветоцифрени број дељив са 6, победник је играч А, а ако није дељив са 6 победник је играч В. Ко има победничку стратегију, играч А (који има 5 потеза) или играч В (који има 4 потеза), ако се поља таблице могу попуњавати било којим редом?

Победничку стратегију има играч В. Зашто и како?

Да би деветоцифрени број био дељив са 6, он мора бити дељив са 2 и 3.

Циљ играча В је да добијени дветоцифрени број није дељив са 3.

Тај циљ ће реализовати, ако у своја 4 потеза испише бројеве који су дељиви са 3, а то су 0, 3, 6 и 9.

Како је збир свих бројева  $1 + 2 + \dots + 9 + 0 = 45$ , а преосталих 6 бројева су 1, 2, 4, 5, 7 или 8, онда ће један од тих бројева, као десети сигурно изостати, па је ће добијени збир девет цифара бити: 44 (ако не буде написана цифра 1), 43 (ако не буде написана цифра 2), 41 (ако не буде написана цифра 4), 40 (ако не буде написана цифра 5), 38 (ако не буде написана цифра 7) и 37 (ако не буде написана цифра 8).

Напомена: Ако играч А напише неку од цифара 0, 3, 6 или 9 играч В ће тим пре победити, јер му преостаје да у својим потезима напише само цифре (из тог скупа) које већ нису написане.

## 8. РАЗРЕД

1. Три ливаде имају површину 5, 15 и 36 хектара. На свакој од њих трава расте равномерно. Прву ливаду попасе 12 крава за 4 недеље, другу 21 крава за 9 недеља. Колико највише крава може пасти трећу ливаду 18 недеља? (Њутнов задатак о три ливаде)

Нека је а количина траве која се налази на 1 хектару ливаде, б количина траве која порасте на 1 хектару ливаде за једну недељу и с количина траве коју једна крава попасе за 1 недељу. Из услова задатка је:  $5a + 5 \cdot 4b = 4 \cdot 12c$  и  $15a + 9 \cdot 15b = 21 \cdot 9c$

Ако се прва једначина помножи са 3 добије се да је  $15a + 60b = 144c$ .

Како је и  $15a + 135b = 189c$ , то се одизимањем једнакости добија  $75b = 45c$ , па је  $5b = 3c$ .

Тада је  $5a + 12c = 48c$  или  $5a = 36c$  и коначно  $10a = 72c$ .

Како је  $36a + 18 \cdot 36b = k \cdot 18c$  (к је број недеља које краве могу пасти на трећој ливади), то је  $2a + 36b = kc$  или  $10a + 180b = 5kc$ .

Следи да је  $72c + 108c = 5kc$ , тј.  $180c = 5kc$ , па је  $k = 180 : 5 = 36$  недеља.

2. Дат је број  $A = 1^{2024} + 2^{2024} + 3^{2024} + 4^{2024} + 5^{2024} + 6^{2024}$ . Колики је остатак при дељењу броја А са 7.

Како је  $1 \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $3^3 \equiv 27 \equiv -1 \pmod{7}$ ,  $4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{7}$ ,

$5^3 \equiv 125 \equiv -1 \pmod{7}$ ,  $6 \equiv -1 \pmod{7}$ .

Број  $2024 = 2022 + 2 = 3 \cdot 674 + 2$ .

$$\begin{aligned}
&\text{Тада је } 1^{2024} + 2^{2024} + 3^{2024} + 4^{2024} + 5^{2024} + 6^{2024} \equiv \\
&1^{2024} + (2^3)^{674} \cdot 4 + (3^3)^{674} \cdot 9 + (4^3)^{674} \cdot 16 + (5^3)^{674} \cdot 25 + 6^{2024} \equiv \\
&1 + 1^{674} \cdot 4 + (-1)^{674} \cdot 2 + 1^{674} \cdot 2 + (-1)^{674} \cdot 4 + (-1)^{2024} \equiv \\
&1 + 4 + 2 + 2 + 4 + 1 \equiv 14 \equiv 0 \pmod{7}.
\end{aligned}$$

То значи да је број А дељив дељив са 7.

3. Ако су  $a$ ,  $b$  и  $c$  дужине страница троугла ABC онда важи неједнакост:

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} < 3. \text{ Докажи.}$$

$$\text{Јасно је да је } \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+c} > \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b} > \frac{c}{a+b+c}.$$

$$\text{Тада је } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.$$

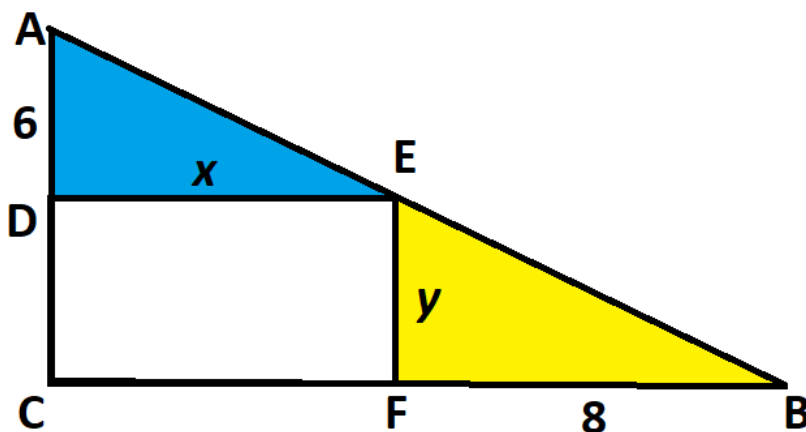
$$\text{Из неједнакости троугла је } \frac{a}{b+c} < 1, \frac{b}{a+c} < 1, \frac{c}{b+a} < 1.$$

$$\text{Сабирањем претходних неједнакости добија се да је } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} < 3.$$

4. У правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C уписан је правоугаоник CDEF, тако да тачка D припада катети AC, тачка E припада хипотенузи AB и тачка F припада катети BC, при чему је  $AD = 6$  и  $BF = 8$ .

а) Колика је површина правоугаоника CDEF?

б) Колика је најмања могућа површина троугла ABC?



Нека су странице правоугаоника CDEF:  $x = DE$  и  $y = EF$ .

Правоугли троуглови ADE и BEF су слични, јер имају све углове једнаке.

Из сличности је  $x : 6 = 8 : y$ , па је  $xy = 6 \cdot 8 = 48$ .

Површина правоугаоника CDEF је 48.

Површина троугла ABC је  $P = (8 + x)(6 + y) : 2 = (48 + 6x + 8y + xy) : 2 = (48 + 6x + 8y + 48) = 48 + 3x + 4y$ .

Тада је  $P = 48 + 3x + 4 \cdot \frac{48}{x} = 48 + 3\left(x + \frac{64}{x}\right)$ .

На основу неједнакости аритметичке и геометријске средине је

$$\left(x + \frac{64}{x}\right) \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{64}{x}} = 2 \cdot 8 = 16 .$$

Како је  $P \geq 48 + 3 \cdot 16 = 96$ , најмања површина је 96 и добија се када је  $x = 8$ , а тада је  $y = 6$ , тј. странице троугла су  $BC = 16$  и  $AC = 12$ .

5. Одреди све целе бројеве  $x$  и  $y$  такве да је  $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ .

Ако је  $x = 0$ , онда је  $y^2 = 0$ , па је  $(0, 0)$  једно решење.

Ако  $x$  и  $y$  нису 0, онда се дељењем са  $x^2y^2$  добија  $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2} = 1$ .

Ако је  $|x| \geq 2$  и  $|y| \geq 2$ , онда је  $x^2 \geq 4$ ,  $xy \geq 4$  и  $y^2 \geq 4$ , па је лева страна једнакости увек мања или једнака  $\frac{3}{4}$  и једначина нема решења.

Дакле могући су једино случајеви када је  $x = 1$  или  $x = -1$ ,

Ако је  $x = 1$ , онда је  $1 + y + y^2 = y^2$ , па је  $y = -1$ .

Ако је  $x = -1$ , онда је  $1 - y + y^2 = y^2$ , па је  $y = 1$ .

Једина решења дате једначине су  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  и  $(-1, 1)$ .

Постоје и други начини да се дође до решења.