

ПРОБНО ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2024/2025

РЕШЕЊА

3. РАЗРЕД

1. Анка и Бранка треба да поделе 224 салвета тако да Анка добије 56 салвета више од Бранке. Колико салвета ће добити Анка, а колико Бранка?

Ако Анка узме 56 салвета, онда Анки и Бранки припада једнак број салвета, што је укупно $224 - 56 = 168$. Тада је Бранка добила $168 : 2 = 84$ салвета, а Анка $84 + 56 = 140$ салвета.
Провера: $140 + 84 = 224$.

2. Број А једнак је збиру два најмања непарна броја пете стотине.
Број В једнак је збиру два највећа парна броја треће стотине.
Израчунај збир и разлику бројева А и В.

Број А је $401 + 403 = 804$, а број В је $298 + 300 = 598$.
Њихов збир је $804 + 598 = 1402$, а разлика $804 - 598 = 206$.

3. Располажеш са 5 палидрваца.
а) Напиши најмањи „римски број“ који садржи свих тих пет палидрваца;
б) Напиши највећи „римски број“ који садржи свих тих пет палидрваца;
в) Како се римским цифрама записује њихов збир?

Најмањи број је VIII, највећи MI, а њихов збир је $8 + 1001 = 1009$, тј. MIX у запису римским цифрама.

4. Користећи пет цифара 7, симболе рачунских операција и заграде, напиши пет израза чије су вредности редом 1, 2, 3, 4 и 5.

Нека од могућих решења су:

$$7 : 7 + (7 - 7) : 7 = 1$$

$$(7 + 7) : 7 + 7 - 7 = 2$$

$$7 : 7 + (7 + 7) : 7 = 3$$

$$(7 + 7 + 7 + 7) : 7 = 4$$

$$7 - 7 : 7 - 7 : 7 = 5$$

5. Одреди два троцифрена броја A и B ако они испуњавају следеће услове:
Бројеви A и B су исте парности;
Бројеви $A + B$ и $A - B$ су троцифрени;
Број $A + B$ је највећи могућ, а број $A - B$ је најмањи могућ.

Бројеви A и B су или оба парна или оба непарна.

Тада су њихов и збир $A + B$ и њихова разлика $A - B$ парни и троцифрени.

То значи да је најмања могућа разлика $A - B = 100$, а највећи збир је $A + B = 998$.

Тада су тражени бројеви $A = (998 + 100) : 2 = 549$ и $B = (998 - 100) : 2 = 449$.

4. РАЗРЕД

1. На математичком квизу Анка је освојила два пута више бодова од Бранке, а два пута мање бодова од Данке. Колико бодова је освојила свака од њих ако је освојено укупно 168 бодова?

Очигледно је Бранка освојила најмање бодова, на пример x .

Тада је Анка освојила $2 \cdot x$ бодова, а Данка $4 \cdot x$ бодова.

Следи да је $x + 2x + 4x = 7x = 168$, па је $x = 168 : 7 = 24$.

Значи да је Анка освојила $2x = 48$, Бранка $x = 24$ и Данка $4x = 96$ бодова.

2. а) Напиши најмањи и највећи петочифрен број чији је збир цифара 27.
б) Напиши најмањи и највећи четвороцифрен број чији је производ цифара 28.

а) Најмањи број почиње најмањом цифром дакле цифром 1, па је најмањи такав петочифрен број 10899. Највећи број почиње највећом цифром и то је број 99900.

б) Најмањи број почиње најмањом цифром дакле цифром 1, па је најмањи такав четвороцифрени број 1147, Највећи број почиње највећом цифром и то је број 7411.

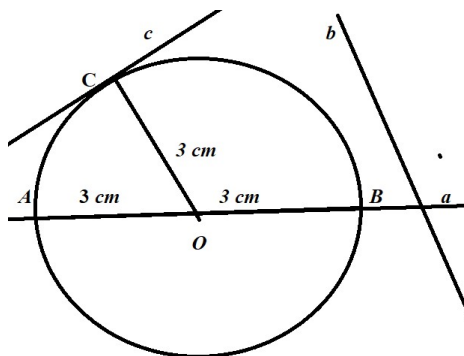
3. Од 12 једнаких квадрата чија је страница 3 cm направљен је правоугаоник. Колики је обим тог правоугаоника? Колико има могућих, а различитих решења?

Дати правоугаоници се могу поређати у формације: 1×12 , 2×6 и 3×4 , па има три решења.

Дужине њихових страница су 3 cm и 36 cm, 6 cm и 18 cm и 9 cm и 12 cm.

Њихови обими су 78 cm, 48 cm и 42 cm.

4. а) Нацртај кружницу k која има центар O и полупречник 3 cm .
 б) Нацртај праву a која садржи тачку O и кружницу k сече у тачкама A и B .
 в) Нацртај праву b , тако да права b не сече кружницу.
 г) Нацртај праву c , тако да права c додирује кружницу k у тачки C .
 д) Одреди дужину дужи AB и OC .



Дуж AB је пречник круга и $AB = 6\text{ cm}$, а дуж OC је полупречник круга и $OC = 3\text{ cm}$.

5. За 3 kg брашна и 5 kg шећера, плаћено је 832 динара, а за 5 kg брашна и 3 kg шећера плаћено је 768 динара. Колико кошта 6 kg брашна и 6 kg шећера?

Из услова задатка следи да је за 8 kg брашна и 8 kg шећера, плаћено је $832 + 768 = 1600$ динара. То значи да 1 kg брашна и 1 kg шећера кошта $1600 : 8 = 200$ динара. Тада 6 kg брашна и 6 kg шећера кошта $6 \cdot 200 = 1\,200$ динара.

5. РАЗРЕД

1. Чоколада има 48 „коцкица“. Мира је појела једну половину чоколаде, а Нада једну трећину чоколаде.
 а) Колико „коцкица“ је остало за Јагуду?
 б) Који део чоколаде је остао за Јагуду?

Мира је појела 24 коцкице, а Нада 16 коцкица, што је укупно 40 коцкица. Јагоди је остало $48 - 40 = 8$ коцкица, што је једна шестина чоколаде.

2. Дрвена коцка чија је површина 54 cm^2 исечена на коцкице чија је ивица 1 cm (кубне центиметре). Од добијених коцкица је сложен квадар, тако да су употребљене све расположиве коцкице.
 а) Колика је површина квадрата?
 б) Колико има решења?

Ако је површина коцке 54 cm^2 , онда је површина једне стране коцке $54 : 6 = 9 \text{ cm}^2$.

То значи да је дужина ивице коцке 3 cm , а запремина коцке 27 cm^3 .

Коцкице се могу сложити у квадар чије су димензије 1 cm , 1 cm и 27 cm или у квадар чије су ивице 1 cm , 3 cm и 9 cm .

Површина првог квадрата је $2 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 27 + 1 \cdot 27) = 110 \text{ cm}^2$, а површина другог квадрата је $2 \cdot (1 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 9) = 78 \text{ cm}^2$.

3. Одреди најмањи и највећи четвороцифрен природан број који при дељењу са 6, 5, 4 и 3 даје остатак 2.

Број који је за 2 већи од траженог је дељив са 6, 5, 4 и 3, што значи да је дељив са $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$, тј. са 60. Најмањи такав четвороцифрени број је $960 + 60 + 2 = 1022$, а највећи $9960 + 2 = 9962$.

4. Вукашин је на табли написао два различита двоцифрена проста броја који имају особину да када цифре првог броја промене места добије се други број и обрнуто, када цифре другог броја замене места добије се први број. Ђорђе је потом написао још један прост број. Које бројеве је написао Вукашин, а који Ђорђе, ако је збир бројева написаних на табли 90?

Вукашин је на табли могао написати само просте бројеве који не садрже парне цифре и цифру 5, јер би се бројеви написани обрнутим цифрама завшавали парном цифром и цифром 5 и били сложени. Дакле Вукашин је на табли написао бројеве 11 и 11, 13 и 31, 17 и 71, 31 и 13, 37 и 73, 71 и 17, 73 и 37, 79 и 97, 97 и 79. Збир тих бројева је паран и износи 22, 44, 88, 110, 176. Ђорђе је тада могао записати само број $90 - 22$, $90 - 44$, $90 - 88$, $90 - 110$, $90 - 176$. Очигледно да је од свих добијених разлика једино 2 прост број. Према томе Вукашин је на табли написао просте бројеве 17 и 71, а Ђорђе прост број 2.

Друго решење; Збир три проста броја је увек непаран изузев у случају да је један од њих паран, јер је тада збир три проста броја паран. Како је 90 паран број, то је један од написаних бројева прост број 2, и њега је написао Ђорђе, јер је Вукашин написао двоцифрене просте бројеве. Збир простих бројева које је написао Вукашин је $90 - 2 = 88$, па у обзир долазе парови $11 + 11 = 22$, $13 + 31 = 44$, $17 + 71 = 88$. Дакле Вукашин је написао бројеве 17 и 71.

5. Збир природних бројева који су елементи скупа А је 2027, а збир природних бројева који су елементи скупа В је 2029. Одреди скупове А и В, ако је $A \cap B = \{2024\}$. Колико има решења?

Ако је $A \cap B = \{2024\}$, онда је збир бројева у скупу $A \setminus B$ једнак $2027 - 2024 = 3$, а збир бројева у скупу $B \setminus A = 2029 - 2024 = 5$. Тада постоје две могућности. У скупу $A \setminus B$ је само број 3 и у скупу $A \setminus B$ су бројеви 1 и 2. Онда су у првом случају у скупу $B \setminus A$ бројеви 1 и 4 или сам број 5, а у другом случају само број 5. Постоје три различита решења: $A = \{2024, 3\}$, $B = \{2024, 1, 4\}$; $A = \{2024, 3\}$, $B = \{2024, 5\}$; $A = \{2024, 1, 2\}$, $B = \{2024, 5\}$.

6. РАЗРЕД

1. Упореди бројеве А и В, ако је $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot 100$ и $B = (1,375 - 0,8 \cdot 1,25) : \frac{1}{396}$.

Израз $A = 1,4 \cdot 100 = 140$, а израз $B = 0,375 \cdot 396 = \frac{3}{8} \cdot 99 \cdot 4 = \frac{3}{2} \cdot 99 = 148,5$.

Како је $A = 140$, а $B = 148,5$ то је $B > A$.

2. Спољашњи углови троугла ABC су $\alpha_1 = 122^\circ$ и $\beta_1 = 118^\circ$. Упореди странице АВ, ВС и СА троугла ABC.

Унутрашњи углови троугла ABC су $\alpha = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$ и $\beta = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$. Тада је угао $\gamma = 180^\circ - 58^\circ - 62^\circ = 60^\circ$. Следи да је $\alpha < \gamma < \beta$, па је $BC < AB < AC$.

3. Збир n узастопних целих бројева је $S = -15$, а њихов производ је $P = 0$. Одреди све могуће вредности броја n .

Како је $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ и како је производ бројева 0, то значи да је 0 и у збиру. То значи да за збир -15 постоје следеће могућности:

- (1) $(-15) + (-14) + (-13) + \dots + 13 + 14 = -15$ и има $n = 15 + 1 + 14 = 30$ сабирака;
- (2) $(-8) + (-7) + (-6) + (-5) + \dots + 0 + \dots + 5 + 6 = -15$ и има $n = 8 + 1 + 6 = 15$ сабирака;
- (3) $(-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + \dots + 0 + 1 + 2 + 3 = -15$ и има $n = 10$ сабирака;
- (4) $(-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 = -15$ и има $n = 5 + 1 = 6$ сабирака;

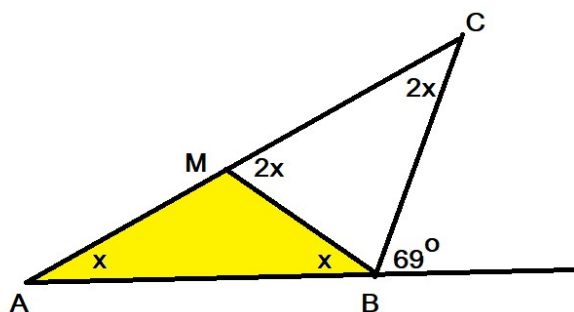
4. Одредити просте бројеве p , q и r , тако да је $100p + 200q + r = 807$.

Како је $100p + 200q + r = 807$, то је $200q < 807$, што значи да је $q < 4$ и разликују се два случаја:

- (1) Ако је $q = 2$, онда једначина гласи $100p + 400 + r = 807$ и $100p + r = 407$. Тада је $p = 2$ или $p = 3$. Једначина $100 \cdot 2 + r = 407$ нема решења у скупу простих бројева, јер 207 је сложен број (дељив са 3). Једначина $100 \cdot 3 + r = 407$ има решење јер је број 107 прост број.
- (2) Ако је $q = 3$, онда једначина гласи $100p + 600 + r = 807$ и $100p + r = 207$. Тада је $p = 2$ и $r = 7$.

Тражени прости бројеви су 3, 2, 107 и 2, 3, 7.

5. На страници AC троугла ABC дата је тачка М, тако да је $AM = MB = BC$. Одредити углове троугла ABC, ако је спољашњи угао троугла код темена В једнак 69° .



Нека је $\angle BAC = x$. Како је $AM = BM$, то је и $\angle ABM = x$.

Тада је $\angle BMC = 2x$ (као спољашњи несуседни угао).

Следи да је и угао $MCB = 2x$, јер је $BM = BC$.

Тада је збир углова $\angle BAC = x$ и $\angle ACB = 2x$, једнак спољашњем углу код темена B , па је $x + 2x = 3x = 69^\circ$ и $x = 69 : 3 = 23^\circ$.

То значи да је $\angle BAC = x = 23^\circ$, $\angle ABC = 111^\circ$ и $\angle ACB = 2x = 46^\circ$.

7. РАЗРЕД

1. Колико има четвороцифрених природних бројева чији су квадрати мањи од 2024?

Нека је x тражени четвороцифрени број.

Важи неједнакост $x \geq 1000$ па је тада $x^2 \geq 1000^2 \geq 1\,000\,000$, па не постоји квадрат који је мањи од 2024.

Одговор је 0.

2. У координатном xOy систему дате су тачке $A(2, 3)$ и $B(6, 6)$. Израчунај дужину дужи AB .

Ако тачка C има координате $(2, 6)$, онда је дужина странице $AC = 6 - 3 = 3$, а дужина странице $BC = 6 - 2 = 4$. Тада је из Питагорине теореме $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$, па је $AB = 5$.

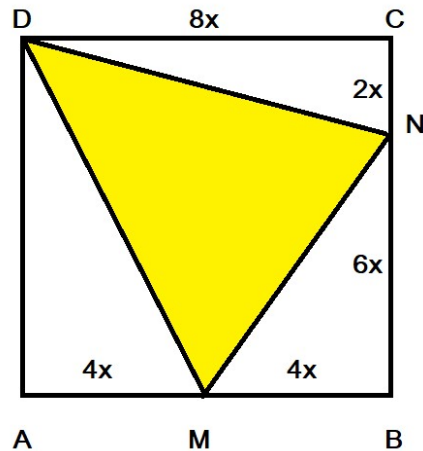
3. Шта је веће: $5\sqrt{7}$ или $6\sqrt{5}$?

Ако је $A = 5\sqrt{7} > 0$ и $B = 6\sqrt{5} > 0$.

Тада је $A^2 = 25 \cdot 7 = 175$ и $B^2 = 36 \cdot 5 = 180$.

Како је $B^2 > A^2$ и како су A и B позитивни, то је и $B > A$, тј. $6\sqrt{5} > 5\sqrt{7}$.

4. На страницама AB и BC квадрата $ABCD$ дате су тачке M и N такве да је $AM : BM = 1 : 1$ и $BN : CN = 3 : 1$. Који део квадрата у процентима заузима троугао MND ?



Нека је страница квадрата $ABCD$ једнака $8x$. Тада је $AM = BM = 4x$ и $BN = 6x$ и $NC = 2x$. Површина квадрата $ABCD$ је $64x^2$, а површине троуглова AMD , MNB и CND су редом $16x^2$, $12x^2$ и $8x^2$. Површина троугла MND је $64x^2 - 16x^2 - 12x^2 - 8x^2 = 28x^2$. То значи да троугао MND заузима $28/64 = 7/16 = 43,75\%$ површине квадрата $ABCD$.

5. За реалне бројеве a, b, c и d важе једнакости: $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 5$ и $c : d = 6 : 7$. Израчунај бројеве a, b, c и d , ако је $a + b + c + d = 105$.

Како је НЗС $(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420$, нека је $d = 420x$. Тада је $c = 360x$, $b = 288x$ и $a = 192x$. Следи да је $a + b + c + d = 192x + 288x + 360x + 420x = 1260x = 105$, па је $x = 105/1260 = 1/12$. Добијамо да је $a = 192x = 16$, $b = 288x = 24$, $c = 360x = 30$ и $d = 420x = 35$.

Друго решење: Ако је $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 5$ и $c : d = 6 : 7$, онда је $a : b = 2 : 3 = 16 : 24$, $b : c = 4 : 5 = 24 : 30$ и $c : d = 6 : 7 = 30 : 35$. То значи да ако је $a = 16k$, онда је $b = 24k$, $c = 30k$ и $d = 35k$. Тада је $a + b + c + d = 16k + 24k + 30k + 35k = 105k = 105$ и $k = 1$. Следи да је $a = 16$, $b = 24$, $c = 30$ и $d = 35$.

8. РАЗРЕД

1. Висина CC' правоуглог троугла ABC , дели хипотенузу на делове чије су дужине 9 cm и 16 cm. Израчунај обим и површину троугла ABC .

Како је $h = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$, то је $a^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2$ и $b^2 = 16^2 + 12^2 = 20^2$, па је $a = 15$ cm, $b = 20$ cm и $c = 16 + 9 = 25$ cm. Обим троугла је 60 cm, а површина 150 cm².

2. Реши једначину: $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{4x}{5} - \frac{5x}{6} + \frac{6x}{7}$.

Дата једначина је еквивалентна са једначином $x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} \right) = 0$.

Како је израз у загради различит од 0, једино решење дате једначине је 0.

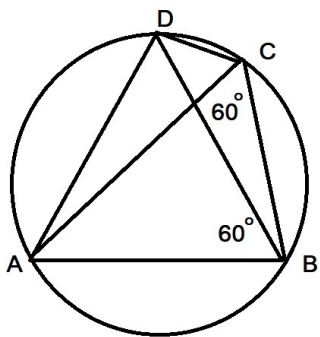
3. Одреди скуп решења неједначине $(x - 2024) \cdot \sqrt{2024 - x} \geq 0$.

Дата неједначина је дефинисана само ако је $2024 - x \geq 0$, тј. ако је $x \leq 2024$.

Како је $\sqrt{2024 - x} \geq 0$, то је и $x - 2024 \geq 0$, тј. $x \geq 2024$.

Очигледно је да је једини број који задовољава обе неједнакости број 2024, који представља и једино решење дате неједначине.

4. Четвороугао ABCD је уписан у круг, при чему је $\angle ABD = \angle ACB = 60^\circ$. Докажи да је троугао ABD једнакостраничан.



Четвороугао ABCD је тетиван (уписан у круг).

Како су углови $\angle ACB = 60^\circ$ и $\angle ADB$ над истим тетивом AB то је и $\angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$.

Сада је у троуглу ABD, $\angle ABD = 60^\circ$ и $\angle ADB = 60^\circ$.

Следи да је тада у троуглу ABD, $\angle BAD = 180 - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, па је троугао ABD једнакостраничан.

5. У квадрат ABCD, чија страница има дужину a , уписан је и око квадрата описан је круг. Докажи да је површина кружног прстена који формирају ова два круга, једнака површини круга уписаног у квадрат.

Полупречник круга уписаног у дати квадрат је r , а полупречник круга описаног око квадрата је $r\sqrt{2}$. Тада је површина кружног прстена једнака $2\pi r^2 - \pi r^2 = \pi r^2$. Површина круга уписаног у квадрат је такође πr^2 . Тиме је доказ завршен и показано је да добијена једнакост важи независно од дужине странице квадрата a .