



ПРОБНО
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЦИ И РЕШЕЊА

ВАЉЕВО,
ФЕБРУАР 2025.

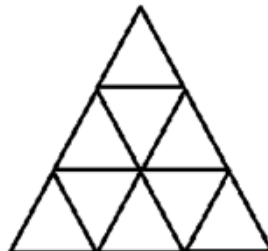
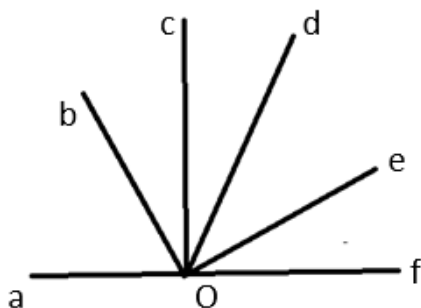


ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2024/25

3. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
01. 02. 2025.

1. Израчунај: а) $9 \cdot 25 : 3$; б) $100 - 8 \cdot 3 + 26 : 2$.
2. Дато је шест полуправих Oa, Ob, Oc, Od, Oe и Of са заједничком тачком O (види слику лево). Колико над датој слици видиш: а) оштрих; б) правих; в) тупих углова. Напиши који су углови оштри, који су прави и који су тупи.



3. Колико се дужи, а колико троуглова може уочити на претходној слици (десно)?
4. Лаза је написао низ са 1 јединицом, 2 двојке, 3 тројке ... 8 осмица и 9 деветки:
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9.
а) Колико бројева је написао Лаза?
б) Израчунај збир свих написаних бројева?
5. За 2 kg брашна и 3 kg шећера плаћено је 470 динара. За 3 kg брашна и 2 kg шећера плаћено је 430 динара. Колико кошта 4 kg брашна и 4 kg шећера?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2024/25

4. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
01. 02. 2025.

1. Израчунај: а) $500 + 400 : 200 - 100$; б) $300 \cdot 200 : 100$.
2. Данас је субота 1. фебруар 2025. године у 10:00 часова. Који дан и датум ће бити за 888 часова?
3. Збир 25 узастопних природних бројева је 2025. Одреди најмањи и највећи сабирак у том збиру.
4. Колико има природних бројева x , таквих да испуњавају следећа три услова:
 $100 - x < 200$, $x + 300 < 400$ и $x - 12 > 34$?
5. Страница квадрата је 3 см. Обим једнакостраничног троугла и правоугаоника једнаки су обиму квадрата.
 - а) Колика је страница једнакостраничног троугла?
 - б) Колико има таквих различитих правоугаоника чије странице си изражене природним бројем центиметара?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2024/25

5. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
01. 02. 2025.

1. Површина квадрата је 2025 cm^2 . Колики је обим тог квадрата?
2. Напиши 9 разломака са двоцифреним именицима који су већи од $\frac{6}{7}$, а мањи од $\frac{7}{8}$.
3. Нацртај кружнице k_1 и k_2 и прву p , ако је:
а) $k_1 \cap k_2 \cap p = \{ A, B \}$;
б) $k_1 \cap k_2 \cap p = \{ C \}$;
в) $k_1 \cap k_2 \cap p = \emptyset$.
4. Дат је троугао ABC. На страници AB дата је тачка K, на страници BC тачке L и M и на страници CA тачке P, Q и R.
а) Колико различитих правих је одређено датим тачкама A, B, C, K, L, M, P, Q и R?
б) Колико дужи одређују дате тачке?
5. Сви елементи скупа A и скупа B су прости бројеви. Одреди скупове A и B, ако је:
 $A \cap B = \{ 67 \}$, збир елемената скупа A је 87 и збир елемената скупа B је 97.
Колико има различитих решења?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2024/25

6. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
01. 02. 2025.

1. Симетрале унутрашњих углова на основици једнакокраког троугла секу се под углом од 122° . Шта је у том троуглу веће: основица или крак?
2. Збир четири различита рационална броја је 2025. Ако се првом броју дода $\frac{1}{2}$, од другог броја одузме $\frac{1}{2}$, трећи број помножи са $\frac{1}{2}$, а четврти број подели са $\frac{1}{2}$ добију се једнаки бројеви. Одреди о која четири рационална броја је реч?
3. Збир 75 узастопних целих бројева је 2025. Одреди најмањи и највећи сабирак у том збиру.
4. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$), На краку AC дата је тачка M, а на краку BC тачка N, тако да је $AM = BN$ и при том се дужи AN и BM секу у тачки S. Докажи да је: а) $AN = BM$; б) $AS = BS$.
5. Ђорђе је купио пун џеп чоколадица. Најпре је срео Ану и дао јој половину свих чоколадица и још пола једне чоколадице. Затим је срео Бану и дао јој половину преосталих чоколадица и још пола једне чоколаде. На крају, када је срео Јелену и дао јој половину чоколадица које су му преостале и још пола једне чоколаде, џеп му је био празан. Колико је чоколадица купио Ђорђе, уз напомену да при деоби чоколадица није преломио ни једну чоколадицу?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

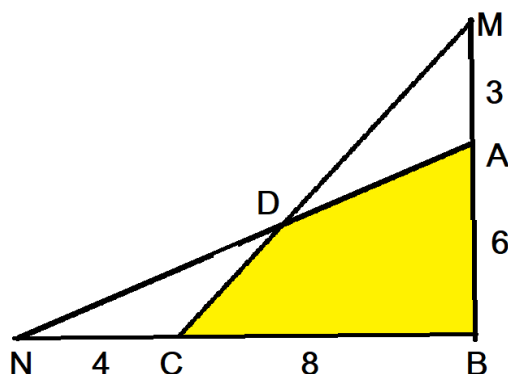


ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2024/25

7. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
01. 02. 2025.

1. Шта је веће: $\sqrt{6 + \sqrt{6}}$ или 3,00001 ?
2. Један угао правоуглог троугла је 60° , а висина која одговара хипотенузи је $2\sqrt{3}$.
Израчунати обим и површину тог троугла.
3. Поређај по величини бројеве: $a = 2^{50}$, $b = 3^{40}$, $c = 4^{30}$ и $d = 5^{20}$.
4. Израчунати површину трапеза ако су основице трапеза $a = 30$ cm и $b = 16$ cm, а краци трапеза $c = 15$ cm и $d = 13$ cm.
5. Дате су две нормалне праве BM и BN (види слику). На правој BM дата је тачка A, тако да је $AB = 6$ и $AM = 3$, а на правој BN тачка C, тако да је $BC = 8$ и $CN = 4$. Ако се праве AN и MC секу у тачки D, израчунај површину четвороугла ABCD.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.



ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
„ДИОФАНТ“ – ВАЉЕВО
ШКОЛСКА 2024/25

8. РАЗРЕД

ПРОБНО ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
01. 02. 2025.

1. Израчунај површину и запремину правилне шестостране призме $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ ако је мања дијагонала призме једнака $8\sqrt{6}$ cm и са основом заклапа угао од 45° .
2. Реши једначину $\frac{x-6}{2020} + \frac{x-5}{2021} + \frac{x-4}{2022} = \frac{x-3}{2023} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-1}{2025}$.
3. Колико има целих бројева x , таквих да је $||x-4|-3| < 2$?
4. Дужине страница тетивног трапеца су изражене природним бројем центиметара, а обим трапеца је 2025 cm. Колико има таквих тетивних трапеца чији један угао је 60° ?
5. Вукашин има 12 једнаких штапова, а сваки од штапова има дужину 13. Вукашин треба да исече штапове на делове дужине 3, 4 и 5, тако да се од добијених делова може направити 13 троуглова сваки са страницама дужине 3, 4, 5. Како Вукашин треба да исече дате штапове?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатка траје 120 минута.

Решење сваког задатка треба кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

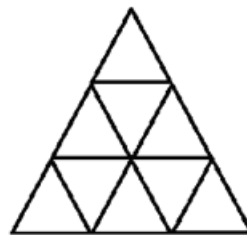
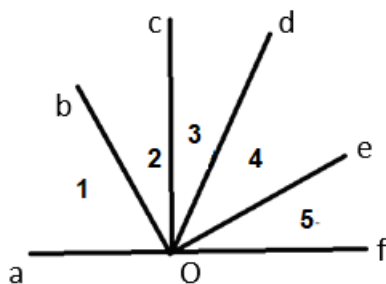
3. РАЗРЕД

1. Израчунај: а) $9 \cdot 25 : 3$; б) $100 - 8 \cdot 3 + 26 : 2$.

а) $9 \cdot 25 : 3 = 225 : 3 = 75$;

б) $100 - 8 \cdot 3 + 26 : 2 = 100 - 24 + 13 = 76 + 13 = 89$.

2. Дато је шест полуправих Oa, Ob, Oc, Od, Oe и Of са заједничком тачком O (види слику лево). Колико над датој слици видиш: а) оштрих; б) правих; в) тупих углова. Напиши који су углови оштри, који су прави и који су тупи.



Ако елементарне углове обележимо бројевима 1, 2, 3, 4 и 5, онда су:

* углови 1, 2, 3, 4, 5, 23, 34, 45 оштри углови и има их 8:

$\angle aOb, \angle bOc, \angle cOd, \angle dOe, \angle eOf, \angle bOd, \angle cOe, \angle dOf$.

* углови 12, 234, 345 су прави и има их 3;

$\angle aOc, \angle bOe, \angle cOf$.

* углови 123, 1234 и 2345 су тупи и има их 3:

$\angle aOd, \angle aOe, \angle bOf$.

3. Колико се дужи, а колико троуглова може уочити на претходној слици (десно)?

На хоризонталним правама има $6 + 3 + 1 = 10$ дужи.

И исто толико на правама које их секу, па је број дужи $10 + 10 + 10 = 30$.

Може и овако: Дужи дужине 1 има $6 + 6 + 6 = 18$. Дужи дужине 2 има $3 + 3 + 3 = 9$ и дужи дужине три има $1 + 1 + 1 = 3$. То је укупно $18 + 9 + 3 = 30$ дужи.

Малих троуглова има $5 + 3 + 1 = 9$. Троуглова чија је страница 2 има 3 и постоји 1 троугао странице 3. То је укупно $9 + 3 + 1 = 13$ троуглова.

4. Лаза је написао низ са 1 јединицом, 2 двојке, 3 тројке ... 8 осмица и 9 деветки:
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... , 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9.

а) Колико бројева је написао Лаза?
б) Израчунај збир свих написаних бројева?

а) Бројева у низу има $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 45$.

б) Њихов збир је $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 =$
 $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 14 + 41 + 85 + 145 = 285$.

5. За 2 kg брашна и 3 kg шећера плаћено је 470 динара. За 3 kg брашна и 2 kg шећера плаћено је 430 динара. Колико кошта 4 kg брашна и 4 kg шећера?

Ако је за 2 kg брашна и 3 kg шећера плаћено 470 динара, а за 3 kg брашна и 2 kg шећера плаћено 430 динара, онда 5 kg брашна и 5 kg шећера коштају $470 + 430 = 900$ динара. Тада 1 kg брашна и 1 kg шећера коштају $900 : 5 = 180$ динара. Значи да 4 kg брашна и 4 kg шећера коштају $4 \cdot 180 = 720$ динара.

4. РАЗРЕД

1. Израчунај: а) $500 + 400 : 200 - 100$; б) $300 \cdot 200 : 100$.

а) $500 + 400 : 200 - 100 = 500 + 2 - 100 = 502 - 100 = 402$;

б) $300 \cdot 200 : 100 = 60000 : 100 = 600$.

2. Данас је субота 1. фебруар 2025. године у 10:00 часова. Који дан и датум ће бити за 888 часова?

Како је $888 : 24 = 37$, то трена израчунати шта ће бити за 37 дана.

Како фебруар има 28 дана за 28 дана ће бити 1. март 2025, у 10:00 сати.

Остаје још $37 - 28 = 9$ дана, па ће тада бити 10. март 2025.

Јасно је да је 37 дана једнако са 5 недеља (седмица) и још два дана.

То значи да ће 7. марта бити петак, а за 888 сати понедељак 10. март у 10:00 сати.

3. Збир 25 узастопних природних бројева је 2025. Одреди најмањи и највећи сабирак у том збиру.

Ако тих 25 бројева обележимо са $x - 12, x - 11, \dots, x - 1, x, x + 1, \dots, x + 11, x + 12$, онда је збир тих бројева $x - 12 + x - 11 + \dots + x - 1 + x + x + 1 + \dots + x + 11 + x + 12 = 25 \cdot x = 2025$. Тада је $x = 2025 : 25 = 81$, па су тражени бројеви $81 - 12 = 69, 81 - 11 = 70 \dots 81 + 11 = 92, 81 + 12 = 93$. Дакле најмањи сабирак је 69, а највећи сабирак је 93.

4. Колико има природних бројева x , таквих да испуњавају следећа три услова:
 $100 - x < 200$, $x + 300 < 400$ и $x - 12 > 34$?

Из прве неједнакости је јасно да број, тј. разлика $100 - x$ мора бити природан број или 0, па x мора бити мање или једнако 100. При том је очигледно $(100 - x)$ увек мање од 200.

Из друге неједнакости је $x < 400 - 300 = 100$, а из треће неједнакости је $x - 12 > 34$, па је $x > 34 + 12$ или $x > 46$.

Закључујемо да је x један од бројева 47, 48, ... 98, 99, а таквих природних бројева има $99 - 46 = 53$.

5. Страница квадрата је 3 cm. Обим једнакостраничног троугла и правоугаоника једнаки су обиму квадрата.
- а) Колика је страница једнакостраничног троугла?
- б) Колико има таквих различитих правоугаоника чије странице су изражене природним бројем центиметара?

Обим квадрата је $4 \cdot 3 = 12$ cm.

а) Ако је страница једнакостраничног троугла x , онда је $x + x + x = 12$ cm.

Тада је $3 \cdot x = 12$ cm, па је $x = 4$ cm.

б) Ако су странице траженог правоугаоника a и b , онда је $2a + 2b = 12$, па је $a + b = 6$ cm. То значи да су странице правоугаоника: 1 cm и 5 cm или 2 cm и 4 cm. Дакле, таквих правоугаоника има 2.

5. РАЗРЕД

1. Површина квадрата је 2025 cm^2 . Колики је обим тог квадрата?

Како је $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = (3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 5) = 45 \cdot 45$, то је дужина странице квадрата 45 cm. Обим квадрата је $4 \cdot 45 = 180$ cm.

2. Напиши 9 разломака са двоцифреним имениоцима који су већи $\frac{6}{7}$, а мањи од $\frac{7}{8}$.

Прво решење: Како је $\frac{6}{7} = \frac{60}{70}$, а $\frac{7}{8} = \frac{70}{80}$, проверимо да ли је

$$\frac{6}{7} = \frac{60}{70} < \frac{61}{71} < \frac{62}{72} < \frac{63}{73} < \frac{64}{74} < \frac{65}{75} < \frac{66}{76} < \frac{67}{77} < \frac{68}{78} < \frac{69}{79} < \frac{70}{80} = \frac{7}{8}.$$

Провером се утврђује да су све неједнакости тачне и тако се добија 9 разломака са двоцифреним имениоцем, који су већи од $\frac{6}{7}$, а мањи од $\frac{7}{8}$.

Друго решење: Како је $\frac{6}{7} = \frac{60}{70}$, а $\frac{7}{8} = \frac{70}{80}$, то нам даје идеју да упоредимо разломке

$\frac{10}{70}, \frac{10}{71}, \frac{10}{72}, \frac{10}{73}, \frac{10}{74}, \frac{10}{75}, \frac{10}{76}, \frac{10}{77}, \frac{10}{78}, \frac{10}{79}, \frac{10}{80}$. Како је од два разломка једнаких

бројилаца већи онај који има мањи именилац то се добијају неједнакости

$\frac{10}{70} > \frac{10}{71} > \frac{10}{72} > \frac{10}{73} > \frac{10}{74} > \frac{10}{75} > \frac{10}{76} > \frac{10}{77} > \frac{10}{78} > \frac{10}{79} > \frac{10}{80}$. Тада је

$1 - \frac{10}{70} < 1 - \frac{10}{71} < 1 - \frac{10}{72} < \dots < 1 - \frac{10}{78} < 1 - \frac{10}{79} < 1 - \frac{10}{80}$ и коначно се добијају

неједнакости $\frac{6}{7} = \frac{60}{70} < \frac{61}{71} < \frac{62}{72} < \frac{63}{73} < \frac{64}{74} < \frac{65}{75} < \frac{66}{76} < \frac{67}{77} < \frac{68}{78} < \frac{69}{79} < \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$.

Треће решење: Нека $\frac{6}{7} < \frac{x-a}{x} < \frac{7}{8}$. Ако у датој неједнакости први разломак

проширимо са $8x$, други са 56 , а трећи са $7x$ добијају се разломци једнаких именилаца

$\frac{6 \cdot 8x}{7 \cdot 8x} < \frac{56(x-a)}{7 \cdot 8 \cdot x} < \frac{7 \cdot 7x}{8 \cdot 7x}$ и следи да је $48x < 56x - 56a < 49x$. Из те неједнакости је

$56a < 56x - 48x$ и $56x - 49x < 56a$ или $7a < x < 8a$. Ако је $a = 12$, онда се добија неједнакост $84 < x < 96$ и низ неједнакости који показује да постоји и више од 9 разломака који испуњавају дати услов:

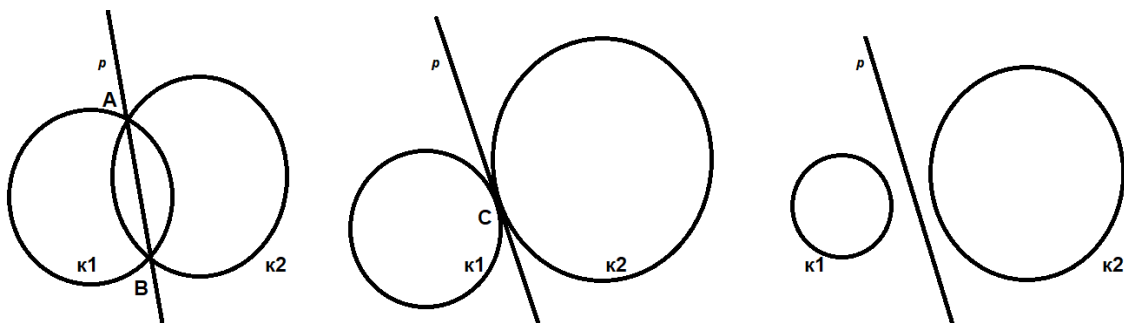
$\frac{6}{7} = \frac{72}{84} < \frac{73}{85} < \frac{74}{86} < \frac{75}{87} < \dots < \frac{82}{94} < \frac{83}{95} < \frac{84}{96} = \frac{7}{8}$.

3. Нацртај кружнице k_1 и k_2 и прву p , ако је:

а) $k_1 \cap k_2 \cap p = \{A, B\}$;

б) $k_1 \cap k_2 \cap p = \{C\}$;

в) $k_1 \cap k_2 \cap p = \emptyset$.



4. Дат је троугао ABC. На страници AB дата је тачка K, на страници BC тачке L и M и на страници CA тачке P, Q и R.

а) Колико различитих правих је одређено датим тачкама A, B, C, K, L, M, P, Q и R?

б) Колико дужи одређују дате тачке?

а) Могу се уочити праве: AB, AC, AL, AM, BC, BP, BQ, BR, CK, KL, KM, KP, KQ, KR, LP, LQ, LR, MP, MQ, ML и има их тачно 20.

б) Како има 9 тачака, то је број дужи једнак $9 \cdot 8 : 2 = 72 : 2 = 36$.

Исто се добија и пребројавањем дужи из сваке тачке $8 + 7 + \dots + 2 + 1 = 36$.

5. Сви елементи скупа A и скупа B су прости бројеви. Одреди скупове A и B , ако је: $A \cap B = \{ 67 \}$, збир елемената скупа A је 87 и збир елемената скупа B је 97. Колико има различитих решења?

Из услова задатка следи да је збир елемената у скупу $A \setminus B$ једнак $87 - 67 = 20$ и збир елемената из скупа $B \setminus A$ једнак $97 - 67 = 30$.

Тада $A \setminus B$ могу бити скупови: $A_1 = \{ 3, 17 \}$, $A_2 = \{ 7, 13 \}$, $A_3 = \{ 2, 5, 13 \}$, $A_4 = \{ 2, 7, 11 \}$.

Слично $B \setminus A$ могу бити скупови: $B_1 = \{ 7, 23 \}$, $B_2 = \{ 11, 19 \}$, $B_3 = \{ 13, 17 \}$, $B_4 = \{ 2, 5, 23 \}$, $B_5 = \{ 2, 11, 17 \}$, $B_6 = \{ 3, 7, 2, 5, 13 \}$.

Различитих решења има онолико колико има пресека скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$ који су празан скуп. То значи колико има парова чији је пресек празан скуп: (A_1, B_1) ; (A_1, B_2) ; (A_1, B_4) ; (A_2, B_2) ; (A_2, B_4) ; (A_2, B_5) ; (A_3, B_1) ; (A_3, B_2) ; (A_4, B_3) . Дакле проблем има 9 решења.

6. РАЗРЕД

1. Симетрале унутрашњих углова на основици једнакокраког троугла секу се под углом од 122° . Шта је у том троуглу веће: основица или крак?

Ако је угао на основици тог једнакокраког троугла $2x$, онда је половина тих углова x , па је тада $2x + 122^\circ = 180^\circ$. Добија се да је $2x = 58^\circ$, што значи да је угао при врху једнакокраког троугла једнак $180^\circ - 58^\circ - 58^\circ = 64^\circ$. То значи да је страница наспрам угла од 64° – основица већа од страница наспрам углова од 58° – кракова (види слику лево уз 4. задатак).

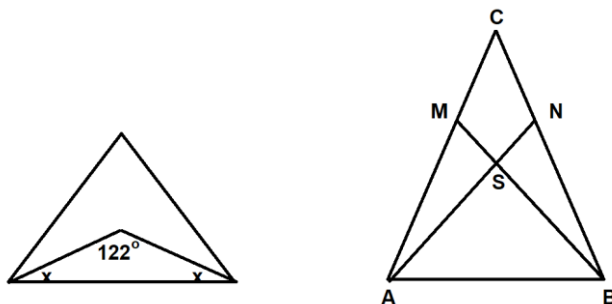
2. Збир четири различита рационална броја је 2025. Ако се првом броју дода $\frac{1}{2}$, од другог броја одузме $\frac{1}{2}$, трећи број помножи са $\frac{1}{2}$, а четврти број подели са $\frac{1}{2}$ добију се једнаки бројеви. Одреди о која четири рационална броја је реч?

Ако су једнаки бројеви по a , онда је први број био $a - \frac{1}{2}$, други број $a + \frac{1}{2}$, трећи број $a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, а четврти број $a : \frac{1}{2} = 2a$. Збир та четири броја је $4a + \frac{a}{2} = 2025$. Следи да је $\frac{9a}{2} = 2025$, па је $a = 2 \cdot 225 = 450$. То значи да су дата четири броја били: 449,5; 450,5; 225 и 900.

3. Збир 75 узастопних целих бројева је 2025. Одреди најмањи и највећи сабирак у том збиру.

Ако тих 25 бројева обележимо са $x - 37, x - 36, \dots, x - 1, x, x + 1, \dots, x + 36, x + 37$, онда је збир тих бројева $x - 37 + x - 36 + \dots + x - 1 + x + x + 1 + \dots + x + 36 + x + 37 = 75 \cdot x = 2025$. Тада је $x = 2025 : 75 = 27$, па су тражени бројеви $-10, -9, \dots, -1, 0, 1, \dots, 63, 64$. Дакле најмањи сабирак је -10 , а највећи сабирак је 64 .

4. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$). На краку AC дата је тачка M, а на краку BC тачка N, тако да је $AM = BN$ и при том се дужи AN и BM секу у тачки S. Докажи да је: а) $AN = BM$; б) $AS = BS$.



Троуглови ABM и ABN су подударни (СУС), јер је $AB = AB$, $\angle BAM = \angle ABN$ и $AM = BN$. Из подударности закључујемо да је $AN = BM$ и да је $\angle ABM = \angle BAN$. То значи да је троугао ABS једнакокрак, па је и $AS = BS$.

5. Ђорђе је купио пун џеп чоколадица. Најпре је срео Ану и дао јој половину свих чоколадица и још пола једне чоколадице. Затим је срео Бану и дао јој половину преосталих чоколадица и још пола једне чоколаде. На крају, када је срео Јелену и дао јој половину чоколадица које су му преостале и још пола једне чоколаде, џеп му је био празан. Колико је чоколадица купио Ђорђе, уз напомену да при деоби чоколадица није преломио ни једну чоколадицу?

Због напомене да Ђорђе при деоби чоколадица није ломио чоколаде, закључујемо да је број чоколада које је купио био непаран, на пример $2a + 1$. Ани је дао $a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = a + 1$ чоколаду. Остало је a чоколада, што значи да је Бана добила $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ чоколада.

Остало је $\frac{a}{2} - \frac{1}{2}$ чоколада. То значи да је $\frac{a}{2} - \frac{1}{2} = \frac{a}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$. Решавањем добијене једначине добија се да је $a = 3$, па је Ђорђе купио 7 чоколада. Ана је добила 4 чоколаде, Бана 2 чоколаде и Јелена 1 чоколаду.

7. РАЗРЕД

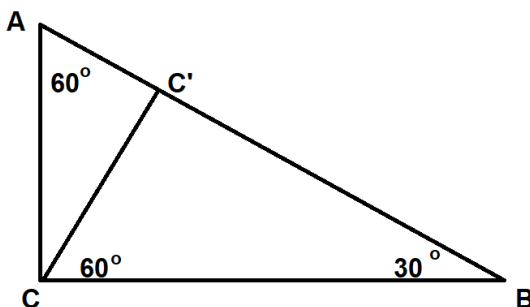
1. Шта је веће: $\sqrt{6 + \sqrt{6}}$ или 3,00001?

Како је $4 < 6 < 9$, то је $2 < \sqrt{6} < 3$.

Тада је $8 < 6 + \sqrt{6} < 9$, а $\sqrt{6 + \sqrt{6}} < \sqrt{9} = 3$.

Како је $\sqrt{6 + \sqrt{6}} < 3$, то је $\sqrt{6 + \sqrt{6}} < 3,00001$.

2. Један угао правоуглог троугла је 60° , а висина која одговара хипотенузи је $2\sqrt{3}$.
Израчунати обим и површину тог троугла.



Нека је у правоуглом троуглу ABC (прав угао је код темена C) дуж CC' хипотенузина висина. Ако је $CC' = 2\sqrt{3}$, онда је $AC = 4$, $AC' = 2$, $BC = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ и $BC' = 6$.

Обим троугла ABC је $4 + 2 + 6 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$.

Површина троугла је $4 \cdot 4\sqrt{3} : 2 = 8\sqrt{3}$.

3. Поређај по величини бројеве: $a = 2^{50}$, $b = 3^{40}$, $c = 4^{30}$ и $d = 5^{20}$.

Из услова задатака је $a = 2^{50} = (2^5)^{10} = 32^{10}$, $b = 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$, $c = 4^{30} = (4^3)^{10} = 64^{10}$ и $d = 5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10}$. Јасно је да је $25^{10} < 32^{10} < 64^{10} < 81^{10}$, па је $d < a < c < b$.

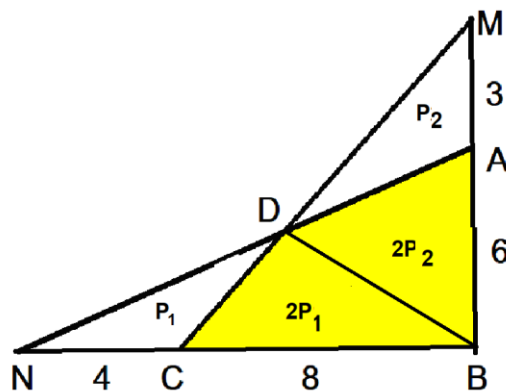
4. Израчунати површину трапеза ако су основице трапеза $a = 30$ cm и $b = 16$ cm, а краци трапеза $c = 15$ cm и $d = 13$ cm.

Ако се један дати трапез подели на паралелограм чије су странице 16 cm и 15 cm и троугао лије су странице $30 - 16 = 14$ cm, 15 cm и 13 cm, онда се коришћењем Хероновог обрасца може израчунати површина троугла која износи 84 cm^2 .

Из површине се добија да је висина троугла и висина трапеза $2 \cdot 84 : 14 = 12$ cm.

Тада је површина трапеза једнака $(30 + 16) \cdot 12 : 2 = 46 \cdot 12 : 2 = 276 \text{ cm}^2$.

5. Дате су две нормалне праве BM и BN (види слику). На правој BM дата је тачка A , тако да је $AB = 6$ и $AM = 3$, а на правој BN тачка C , тако да је $BC = 8$ и $CN = 4$. Ако се праве AN и MC секу у тачки D , израчунај површину четвороугла $ABCD$.



Означимо површину троугла NCD са P_1 . Тада је површина троугла BCD једнака $2P_1$, јер му је висина иста, а основица BC два пута већа од CN .

Слично, ако је површина троугла MAD једнака P_2 , онда је површина троугла ABD једнака $2P_2$.

Тада је површина троугла $ABN = BN \cdot AB : 2 = 12 \cdot 6 : 2 = 36 = 3P_1 + 2P_2$.

На исти начин је површина троугла $BCM = BC \cdot BM : 2 = 8 \cdot 9 : 2 = 36 = 2P_1 + 3P_2$.

Сабирањем претходних једнакости добија се да је $5P_1 + 5P_2 = 36 + 36 = 72$, па је $P_1 + P_2 = 72 : 5$.

Следи да је површина четвороугла $ABCD = 2P_1 + 2P_2 = 2 \cdot 72 : 5 = 144/5$.

8. РАЗРЕД

1. Израчунај површину и запремину правилне шестостране призме $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ ако је мања дијагонала призме једнака $8\sqrt{6}$ cm и са основом заклапа угао од 45° .

Нека је основна ивица призме једнака a . Тада је мања дијагонала основе једнака $a\sqrt{3}$.

Како мања дијагонала правилне шестостране призме са основом заклапа угао од 45° , онда је висина призме, такође $a\sqrt{3}$. Тада је $a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{6}$. Следи да је $a = 8$.

База призме тада има површину $B = 6 \cdot 64\sqrt{3} : 4 = 96\sqrt{3}$.

Површина призме је $P = 2 \cdot 96\sqrt{3} + 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = 192\sqrt{3} + 384\sqrt{3} = 576\sqrt{3}$ cm².

Запремина призме је $V = 96\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96 \cdot 24 = 2304$ cm³.

2. Реши једначину $\frac{x-6}{2020} + \frac{x-5}{2021} + \frac{x-4}{2022} = \frac{x-3}{2023} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-1}{2025}$.

Ако уведемо смену $x = y + 2026$, дата једначина постаје

$$\frac{y + 2020}{2020} + \frac{y + 2021}{2021} + \frac{y + 2022}{2022} = \frac{y + 2023}{2023} + \frac{y + 2024}{2024} + \frac{y + 2025}{2025} \text{ или}$$

$$\frac{y}{2020} + \frac{y}{2021} + \frac{y}{2022} + 3 = \frac{y}{2023} + \frac{y}{2024} + \frac{y}{2025} + 3. \text{ Следи да је}$$

$$y \left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right) = 0, \text{ па је } y = 0 \text{ и } x = 2026, \text{ јер је израз у}$$

загради различит од 0.

3. Колико има целих бројева x , таквих да је $||x - 4| - 3| < 2$?

Ако је $x < 4$, дата неједначина постаје $|4 - x - 3| < 2$, тј. $|1 - x| < 2$.

Ако је $1 - x < 0$, тј. $x > 1$, неједначина ће бити $x - 1 < 2$, па је $x < 3$ и једино целобројно решење је 2.

Ако је $1 - x \geq 0$, тј. $x \leq 1$, неједначина ће бити $1 - x < 2$, па је $x > -1$ и целобројна решења су 0 и 1.

Ако је $x > 4$, дата неједначина постаје $|x - 4 - 3| < 2$, тј. $|x - 7| < 2$.

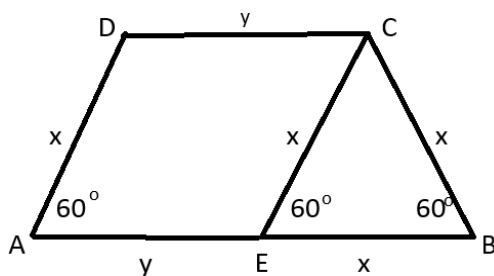
Ако је $x - 7 < 0$, тј. $x < 7$, неједначина ће бити $7 - x < 2$, па је $x > 5$ и једино целобројно решење је 6.

Ако је $x - 7 \geq 0$, тј. $x \geq 7$, неједначина ће бити $x - 7 < 2$, па је $x < 9$ и целобројна решења су 7 и 8.

Према томе неједначина има 6 целобројних решења и то: 0, 1, 2, 6, 7, 8.

4. Дужине страница тетивног трапеца су изражене природним бројем центиметара, а обим трапеца је 2025 см. Колико има таквих тетивних трапеца чији један угао је 60° ?

Ако је један угао тетивног четвороугла ABCD 60° , онда је наспрамни угао 120° , а други оштар угао је такође 60° . То значи да је трапез једнакокрак,



Ако трапез поделимо на паралелограм AECD и троугао BCE (види слику), онда је троугао једнакостраничан, јер има два угла од 60° . Ако краци трапеца AD и BC имају дужину x , а мања основица CD дужину y , онда је обим трапеца једнак $3x + 2y = 2025$. Како су и $3x$ и 2025 дељиви са 3, то мора бити и $2y$, па је $y = 3a$. Тада је $3x + 6a = 2025$, што значи да је $x + 2a = 675$ и $x = 675 - 2a > 0$. Тада је $0 < a < 338$, што значи да тражених трапеца има тачно 337.

5. Вукашин има 12 једнаких штапова, а сваки од штапова има дужину 13. Вукашин треба да исече штапове на делове дужине 3, 4 и 5, тако да се од добијених делова може направити 13 троуглова сваки са страницама дужине 3, 4, 5. Како Вукашин треба да исече дате штапове?

Дати штапови дужине 13 могу се исећи на три различита начина:

А: $3 + 3 + 3 + 4$; В: $3 + 5 + 5$; С: $4 + 4 + 5$.

Нека је сечења типа А било a , сечења типа В било b и сечења типа С било c .

Тада је $a + b + c = 12$, јер је исечено 12 штапова.

Тим сечењима исечено је $3a + b = 13$ штапова дужине 3; $a + 2c = 13$ штапова дужине 4 и $2b + c = 13$ штапова дужине 5.

Значи да је $b = 13 - 3a$ и $2c = 13 - a$.

Тада је $a + 13 - 3a + (13 - a) : 2 = 12$, па је $2a + 26 - 6a + 13 - a = 24$.

Следи да је $5a = 39 - 24 = 15$ и $a = 3$. Тада је $b = 13 - 9 = 4$ и $2c = 13 - 3$, тј $c = 5$.

Дакле, из 3 сечења типа А добијено је 9 штапова дужине 3 и 3 штапа дужине 4.

Из 4 сечења типа В, добијено је 4 штапа дужине 3 и 8 штапова дужине 5.

Из 5 сечења типа С, добијено је 10 штапова дужине 4 и 5 штапова дужине 5.

Укупни има $9 + 4 = 13$ штапова дужине 3, $3 + 10 = 13$ штапова дужине 4 и $8 + 5 = 13$ штапова дужине 5, што значи да је посао успешно завршен са 3 сечења типа А, 4 сечења типа В и 5 сечења типа С.